UNIDAD 5. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS

Probabilidad y Estadística

SUBTEMAS

- 5.1 Distribución Binomial.
- 5.2 Distribución Hipergeométrica.
- 5.2.1 Aproximación de la Hipergeométrica por la Binomial.
- 5.3 Distribución Geométrica.
- 5.4 Distribución Multinomial.
- 5.5 Distribución de Poisson.
- 5.6 Aproximación de la Binomial por la de Poisson.
- 5.7 Distribución Binomial Negativa.
- 5.8 Distribución Uniforme (Discreta).

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- Uno de los conceptos más importantes de la teoría de probabilidades es el de variable aleatoria que, intuitivamente, puede definirse como cualquier característica medible que toma diferentes valores con probabilidades determinadas.
- Toda variable aleatoria posee una distribución de probabilidad que describe su comportamiento.
- Existen dos tipos de variables:
    1. Discretas
    2. Continuas

VARIABLES DISCRETAS

Variable aleatoria discreta (x). Se le denomina variable porque puede tomar diferentes valores, aleatoria, porque el valor tomado es totalmente al azar y discreta porque solo puede tomar valores enteros y un número finito de ellos.

Ejemplos:

- Variable que nos define el número de burbujas por envase de vidrio que son generadas en un proceso dado (x).
  - X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, etc, etc. burbujas por envase}

Las burbujas se cuentan en números enteros

VARIABLES DISCRETAS

- Variable que nos define el número de productos defectuosos en un lote de 25 productos (x).
  - X = {0, 1, 2, 3,....,25 productos defectuosos en el lote}

- Variable que nos define el número de alumnos aprobados en la materia de probabilidad en un grupo de 40 alumnos (x).
  - X = {0, 1, 2, 3, 4, 5,....,40 alumnos aprobados en probabilidad}

Con los ejemplos anteriores nos damos cuenta claramente que los valores de la variable x siempre serán enteros, nunca fraccionarios.

Los productos defectuosos se cuentan en números enteros

Los alumnos reprobados se cuentan en números enteros

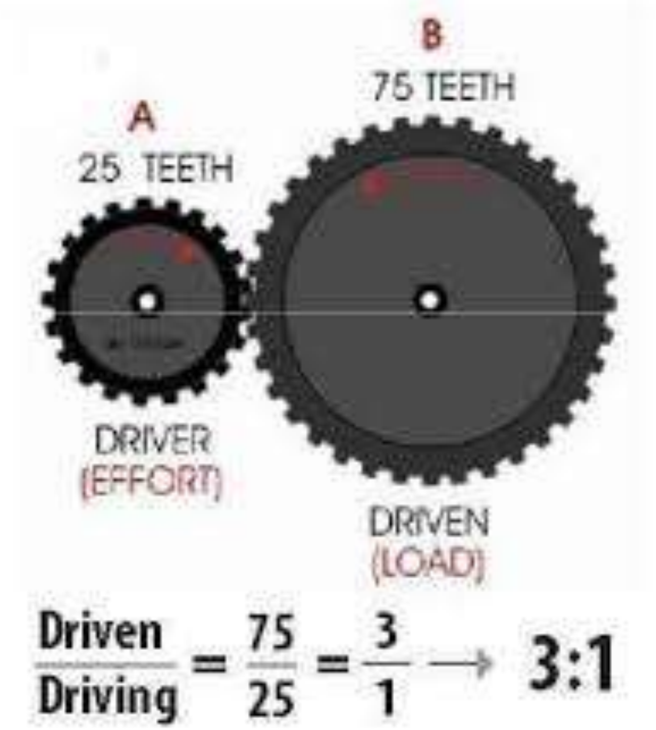
VARIABLES CONTINUAS

Variable aleatoria continua (x). Se le denomina variable porque puede tomar diferentes valores, aleatoria, porque los valores que toma son totalmente al azar y continua porque puede tomar tanto valores enteros como fraccionarios y un número infinito de ellos.

Ejemplos:

Variable que nos define el diámetro de un engrane en pulgadas (x)

- X = {5.0”, 4.99, 4.98, 5.0, 5.01, 5.0, 4.96}



El diámetro de un engrane puede llegar a tener una medida fraccional o entera.

VARIABLES CONTINUAS

Variable que nos define la longitud de un cable o circuito utilizado en un arnés de auto (x)

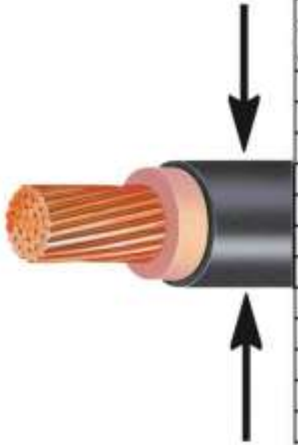
- X = {20.5 cm, 20.1, 20.0, 19.8, 20,6, 20.0, 20.0}

Variable que nos define la concentración en gramos de plata de algunas muestras de mineral (x)

- X = {14.8 gramos, 12.0, 10.0, 42.3, 15.0, 18.4, 19.0, 21.0, 20.8}

Como se observa en los ejemplos anteriores, una variable continua puede tomar cualquier valor, entero o fraccionario.

SECCIÓN DEL CABLE / mm^2	DIÁMETRO mm
0,75mm^2	1,2mm
1mm^2	1,35mm
1,5mm^2	1,7mm
2mm^2	1,9mm
2,5mm^2	2,2mm
4mm^2	2,75mm
6mm^2	3,3mm
10mm^2	4,8mm
16mm^2	5,6mm
25mm^2	7,3mm
35mm^2	9,2mm
50mm^2	10,6mm



Sección del cable mm2	Diámetro exterior en mm
0,75mm	1,8mm
1mm	2mm
1,5mm	2,3mm
2mm	2,8mm
2,5mm	3mm
4mm	4,2mm
6mm	4,5mm
10mm	6mm
16mm	6,8mm
25mm	9,7mm
35mm	10,7mm
50mm	12,5mm

Las medidas de un cable eléctrico y la concentración de minerales, se pueden medir en números fraccionales, decimales o enteros.

Tabla 1. Composición química del mineral estudiado.

Elemento	% en Peso
Al	0.05
SiO_2	9.96
S (Total)	24.31
Ca	0.12
Fe	38.75
Cu	0.41
Zn	6.27
Pb	2.60
Ag	555.3 g/ton.
Au	1.05 g/ton.
Co	97 g/ton.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- Una distribución de probabilidad indica toda la gama de valores que pueden representarse como resultado de un experimento.
- Es decir, describe la probabilidad de que un evento se realice en el futuro, construye una herramienta fundamental para la prospectiva, puesto que se puede diseñar un escenario de acontecimientos futuros considerándolas tendencias actuales de diversos fenómenos.

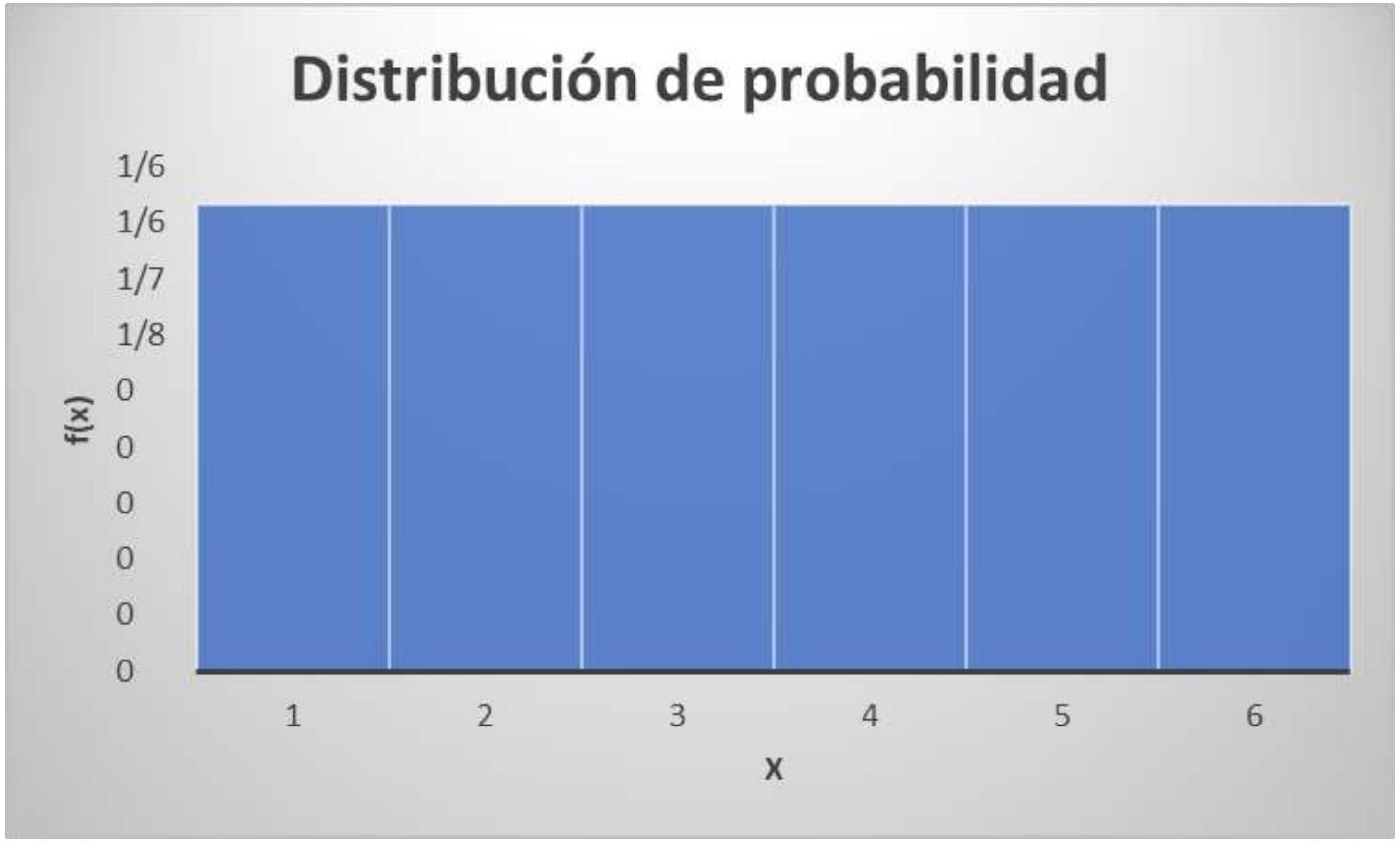
EJEMPLO DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

- El juego de un dado:
- El espacio muestral es S={ 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
- Total de resultados n = 6
  - La probabilidad de que caiga 1 es P(1) = 1/6
  - La probabilidad de que caiga 2 es P(2) = 1/6
  - La probabilidad de que caiga 3 es P(3) = 1/6
  - La probabilidad de que caiga 4 es P(4) = 1/6
  - La probabilidad de que caiga 5 es P(5) = 1/6
  - La probabilidad de que caiga 6 es P(6) = 1/6
- Si sumamos todas las probabilidades: P(1)+P(2)+ P(3)+P(4)+ P(5)+P(6)
- $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$

EJEMPLO

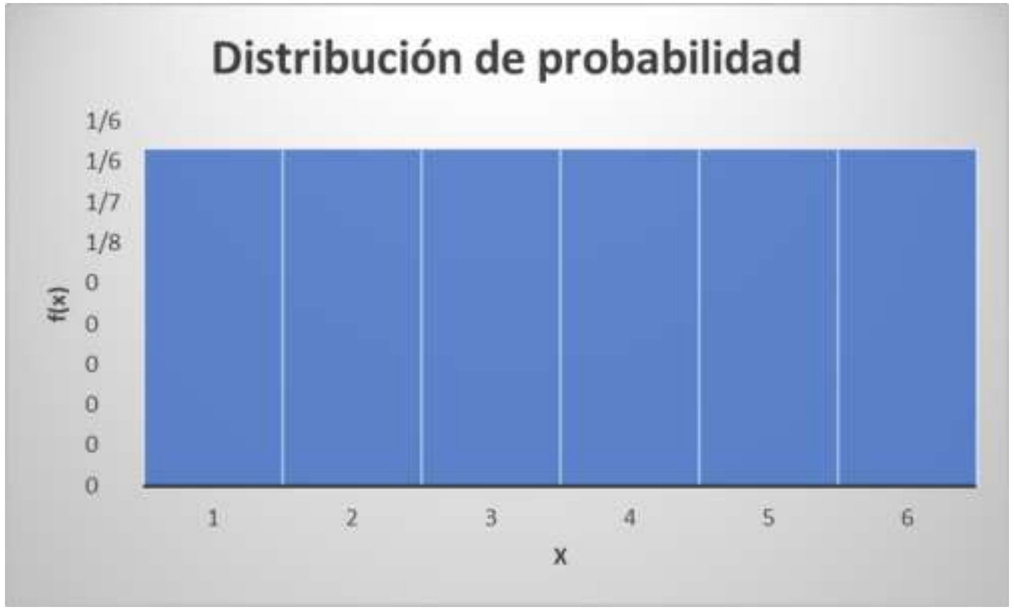
- Y si se grafica:

x	f(x)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6



EJEMPLO

- En este ejemplo las probabilidades son iguales, es por eso que las barras tienen la misma altura (1/6), también el mismo ancho (1), por lo que también tienen la misma área las barras:
- $(1) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$
- Si sumamos las áreas de la gráfica tenemos un área de:
- $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$



DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- Existen diferentes tipos de distribuciones y se estudian de acuerdo a las variables, ya sean discretas o continuas. Es decir, tendremos:
    1. Distribución de probabilidad discreta.
    2. Distribución de probabilidad continua.
- Si la variable es discreta, es decir, si toma valores aislados dentro de un intervalo, su distribución de probabilidad especifica todos los valores posibles de la variable junto con la probabilidad de que cada uno ocurra.
- En el caso continuo, es decir, cuando la variable puede tomar cualquier valor de un intervalo, la distribución de probabilidad permite determinar las probabilidades correspondientes a subintervalos de valores.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- Distribución de Probabilidad Discreta.
- Características:
- Es generada por una variable discreta (x).
- Variable que solo toma valores enteros
- $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots \text{ etc.}\}$
- $P(xi) \geq 0$ Las probabilidades asociadas a cada uno de los valores que toma x deben ser mayores o iguales a cero.
- $\Sigma P(xi) = 1$ La sumatoria de las probabilidades asociadas a cada uno de los valores que toma x debe ser igual a 1.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- Distribución de Probabilidad Continua.
- Es generada por una variable continua (x).
- Es una variable que puede tomar tanto valores enteros como fraccionarios.
- X = {1.0, 3.7, 4.0, 4.6, 7.9, 8.0, 8.3, 11.5, ...,¥}
- $P(xi) \geq 0$ Las probabilidades asociadas a cada uno de los valores que toma x deben ser mayores o iguales a cero. Dicho de otra forma, la función de densidad de probabilidad deberá tomar solo valores mayores o iguales a cero. La función de densidad de probabilidad sólo puede estar definida en los cuadrantes I y II.
- $\Sigma P(xi) = 1$ La sumatoria de las probabilidades asociadas a cada uno de los valores que toma x debe ser igual a 1. El área definida bajo la función de densidad de probabilidad deberá ser de 1.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- Las variables comunes en el cálculo de las distribuciones de probabilidad son:
  - n *es el total de elementos*
  - p *es la probabilidad de éxito o bien la probabilidad del evento o característica de estudio*.
  - q *es la probabilidad de fracaso o bien es la probabilidad del evento complemento*.

    Es decir, $q = 1 - p$

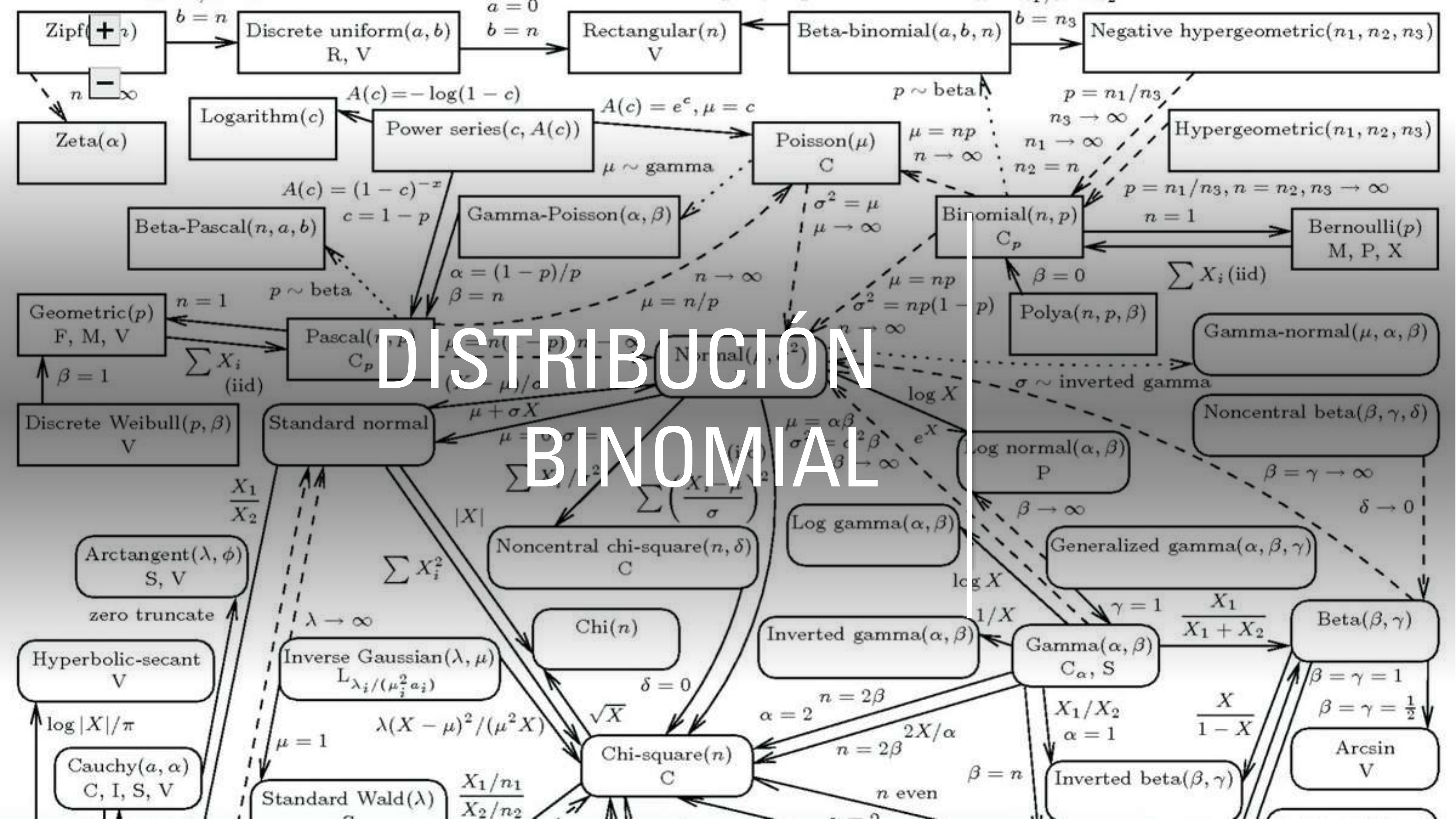
- También es importante recordar que:
  - La probabilidad se encuentra en el rango de 0 a 1. Es decir, $0 \leq p \leq 1$
  - La probabilidad se puede escribir como fracción, número decimal o porciento. Para los cálculos que vamos a realizar en las distribuciones de probabilidad, es importante NO USAR el número porcentual.
  - La probabilidad de un espacio muestral es $P(S) = 1$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETA

- Las distribuciones de probabilidad discretas que veremos son:
- Distribución Binomial
- Distribución Poisson
- Distribución Multinomial
- Distribución Hipergeométrica

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL



DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

- Esta distribución de probabilidad supone ciertas características:
    1. Hay un número fijo de intentos
    2. La probabilidad de un éxito es la misma para cada intento
    3. Todos los intentos son independientes

- También hay que considerar que:
    - *n* (número total de elementos) puede tomar valores, preferentemente, igual o menores a 35
    - *p* (probabilidad de éxito) tiende a tomar valores cercanos a 1

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

- Para hacer el cálculo de las probabilidades de la distribución binomial, se hace uso de la siguiente fórmula:

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = nCx \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}}$$

- Donde:
  - $n = total\ de\ elementos$
  - $x = elementos\ seleccionados$
  - $p = probabilidad\ de\ éxito$
  - $q = probabilidad\ de\ no\ éxito$
  - $nCx = coeficiente\ binomial\ o\ combinación\ de\ n\ seleccionando\ x$
  - Recuerda que una combinación es: $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (en este caso $r = x$)

EJEMPLO

- Un reciente estudio de la Asociación Americana de Conductores de Autopista ha revelado que el 60% de los conductores norteamericanos usa regularmente el cinturón de seguridad. Se selecciona una muestra de 10 conductores en una autopista del estado de Oklahoma.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente siete de ellos lleven el cinturón de seguridad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos siete de los conductores lleven el cinturón de seguridad?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo siete de los conductores lleven el cinturón de seguridad?

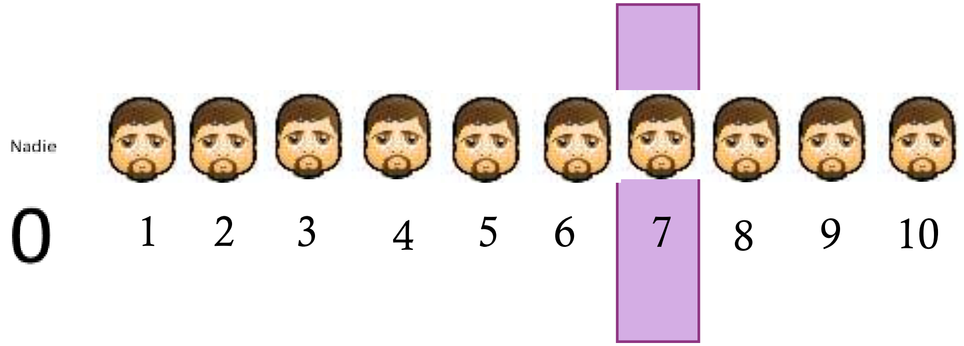
ANALIZANDO EL EJEMPLO

- Un reciente estudio de la Asociación Americana de Conductores de Autopista ha revelado que el 60% de los conductores norteamericanos usa regularmente el cinturón de seguridad. Se selecciona una muestra de 10 conductores en una autopista del estado de Oklahoma.

- Total de elementos
  - n = 10 conductores
- Probabilidad de éxito (característica de estudio)
  - p = 60% usan cinturón de seguridad
  - p = 0.6 (hay que quitarle el porcentaje)
- Probabilidad de fracaso
  - q = 1-p = 1-0.6 = 0.4 no usan el cinturón de seguridad

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente siete de ellos lleven el cinturón de seguridad?



- Sabemos que:
  - $n = 10$ conductores
  - $p = 60\% = 0.6$
  - $q = 1\text{-}p = 1\text{-}0.6 = 0.4$
- Exactamente siete lleven cinturón
  - $x = 7$
  - Quiere decir que solo 7

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

- Sabemos que:
  - n = 10 conductores
  - p = 60% = 0.6
  - q = 1-p = 1-0.6 = 0.4
  - x = 7

- Aplicamos fórmula:
- $\mathrm{f}(x) = nCx \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}$
- *Sustituyendo valores:*
- $f(7) = 10C7 \cdot (0.6)^{7} \cdot (0.4)^{10-7}$
- *Quedaría:*
- $f(7) = 10C7 \cdot (0.6)^{7} \cdot (0.4)^{3}$

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

- $f(7) = 10C7 \cdot (0.6)^7 \cdot (0.4)^3$
- En la calculadora deberás entrar de la siguiente manera la fórmula:
- 10nCr7 x (0.6)^7 x (0.4)^3

^

nCr

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente siete de ellos lleven el cinturón de seguridad?

- Entonces:
- $f(7) = 10C7 \cdot (0.6)^7 \cdot (0.4)^3 = 0.2150$ (Redondeado a diezmilésimas)

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos siete de los conductores lleven el cinturón de seguridad?

- Sabemos que:
  - n = 10 conductores
  - p = 60% = 0.6
  - q = 1-p = 1-0.6 = 0.4
- Al menos siete lleven cinturón
  - $x \geq 7$
  - Quiere decir que pueden ser 7, 8, 9 o 10

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

- Sabemos que:
  - n = 10 conductores
  - p = 60% = 0.6
  - q = 1-p = 1-0.6 = 0.4
  - Como $x \geq 7$, entonces:
    - x = 7
    - x = 8
    - x = 9
    - x = 10

- Aplicamos fórmula:
- $\mathrm{f}(x) = nCx \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}$
- *Sustituyendo valores:*
- $f(7) = 10C7 \cdot (0.6)^{7} \cdot (0.4)^{3}$
- $f(8) = 10C8 \cdot (0.6)^{8} \cdot (0.4)^{2}$
- $f(9) = 10C9 \cdot (0.6)^{9} \cdot (0.4)^{1}$
- $f(10) = 10C10 \cdot (0.6)^{10} \cdot (0.4)^{0}$

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos siete de ellos lleven el cinturón de seguridad?

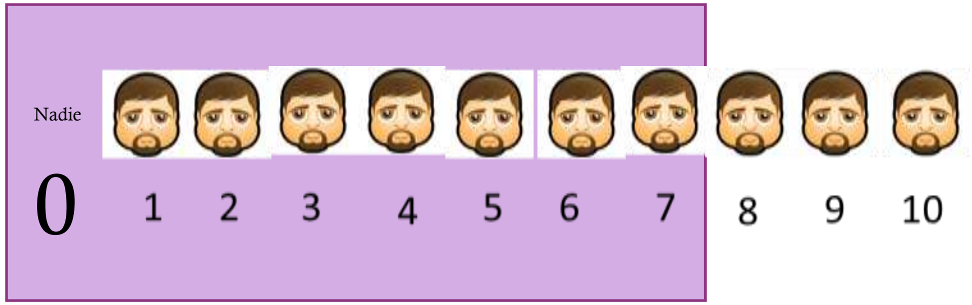
- Entonces:
  - $f(7) = 10C7 \cdot (0.6)^7 \cdot (0.4)^3 = 0.2150$
  - $f(8) = 10C8 \cdot (0.6)^8 \cdot (0.4)^2 = 0.1209$
  - $f(9) = 10C9 \cdot (0.6)^9 \cdot (0.4)^1 = 0.0403$
  - $f(10) = 10C10 \cdot (0.6)^{10} \cdot (0.4)^0 = 0.0060$

(Redondeados a diezmilésimas)

- Se suman los resultados:
- P = $f(7) + f(8) + f(9) + f(10) = 0.3823$

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

c) ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo siete de los conductores lleven el cinturón de seguridad?



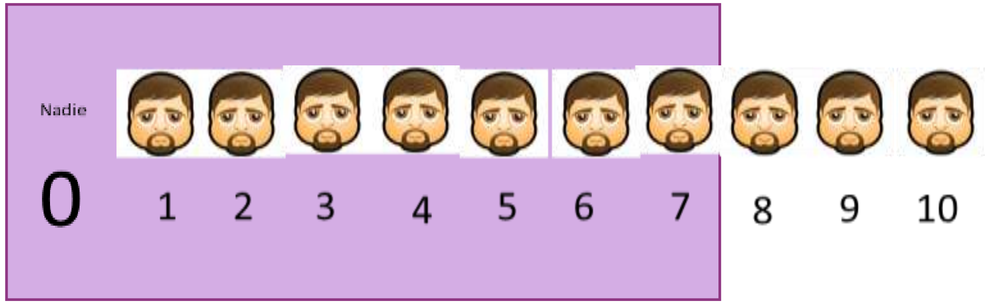
- Sabemos que:
  - n = 10 conductores
  - p = 60% = 0.6
  - q = 1-p = 1-0.6 = 0.4
- Como máximo siete lleven cinturón
  - $x \leq 7$
  - Quiere decir que pueden ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 o 7

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

c) ¿Cuál la probabilidad de que como máximo siete de los conductores lleven el cinturón de seguridad?

Este inciso se puede resolver de dos maneras:

A. De igual forma como se hizo el inciso anterior: calculando todas las probabilidades.
B. Utilizando eventos complementos.



RESOLVIENDO EL EJEMPLO

A. Calculando todas las probabilidades

- Sabemos que:
  - n = 10 conductores
  - p = 60% = 0.6
  - q = 1-p = 1-0.6 = 0.4
  - Como $x \leq 7$, entonces:
    - x = 0
    - x = 1
    - x = 2
    - x = 3
    - x = 4
    - x = 5
    - x = 6
    - x = 7

- Aplicamos fórmula:
- $\mathrm{f}(x) = nCx \cdot p^x \cdot q^{n-x}$
- *Sustituyendo valores:*
- $f(0) = 10C0 \cdot (0.6)^0 \cdot (0.4)^{10}$
- $f(1) = 10C1 \cdot (0.6)^1 \cdot (0.4)^9$
- $f(2) = 10C2 \cdot (0.6)^2 \cdot (0.4)^8$
- $f(3) = 10C3 \cdot (0.6)^3 \cdot (0.4)^7$
- $f(4) = 10C4 \cdot (0.6)^4 \cdot (0.4)^6$
- $f(5) = 10C5 \cdot (0.6)^5 \cdot (0.4)^5$
- $f(6) = 10C6 \cdot (0.6)^6 \cdot (0.4)^4$
- $f(7) = 10C7 \cdot (0.6)^7 \cdot (0.4)^3$

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

c) ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo siete de ellos lleven el cinturón de seguridad?

- Entonces:
- $f(0) = 10C0 \cdot (0.6)^0 \cdot (0.4)^{10} = 0.0001$
- $f(1) = 10C1 \cdot (0.6)^1 \cdot (0.4)^9 = 0.0016$
- $f(2) = 10C2 \cdot (0.6)^2 \cdot (0.4)^8 = 0.0106$
- $f(3) = 10C3 \cdot (0.6)^3 \cdot (0.4)^7 = 0.0425$
- $f(4) = 10C4 \cdot (0.6)^4 \cdot (0.4)^6 = 0.1115$ (Redondeados a diezmilésimas)
- $f(5) = 10C5 \cdot (0.6)^5 \cdot (0.4)^5 = 0.2007$
- $f(6) = 10C6 \cdot (0.6)^6 \cdot (0.4)^4 = 0.2508$
- $f(7) = 10C7 \cdot (0.6)^7 \cdot (0.4)^3 = 0.2150$
- Se suman los resultados:
- P=$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) = 0.8327$

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

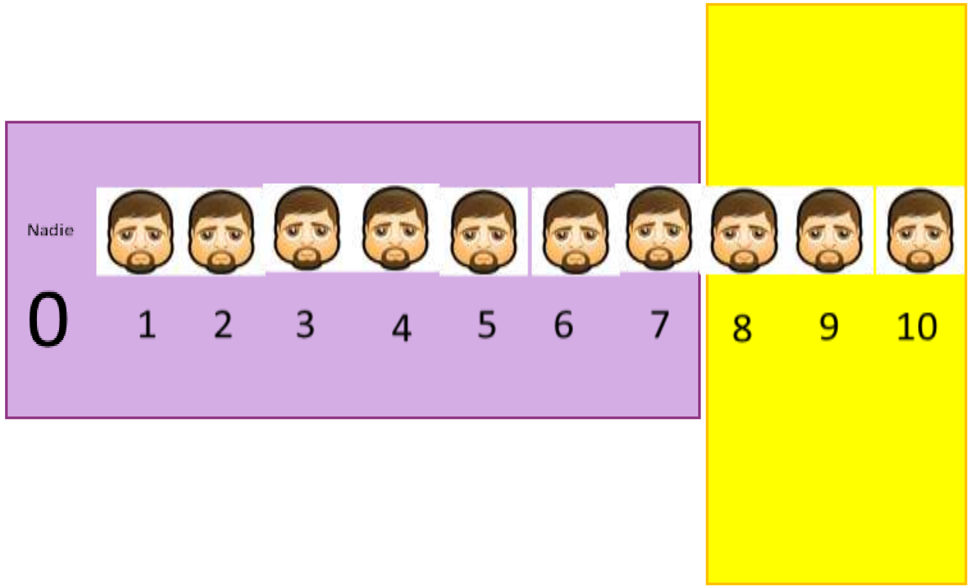
B. Por evento complemento

Para no calcular todas las probabilidades que nos piden, solo se calculan las que no nos piden (que son 8, 9 y 10) y se lo restamos a 1.

Por que se sabe que la suma de todas las probabilidades es 1.

Esto me piden

Esto no me piden



$$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)+f(9)+f(10)=1$$

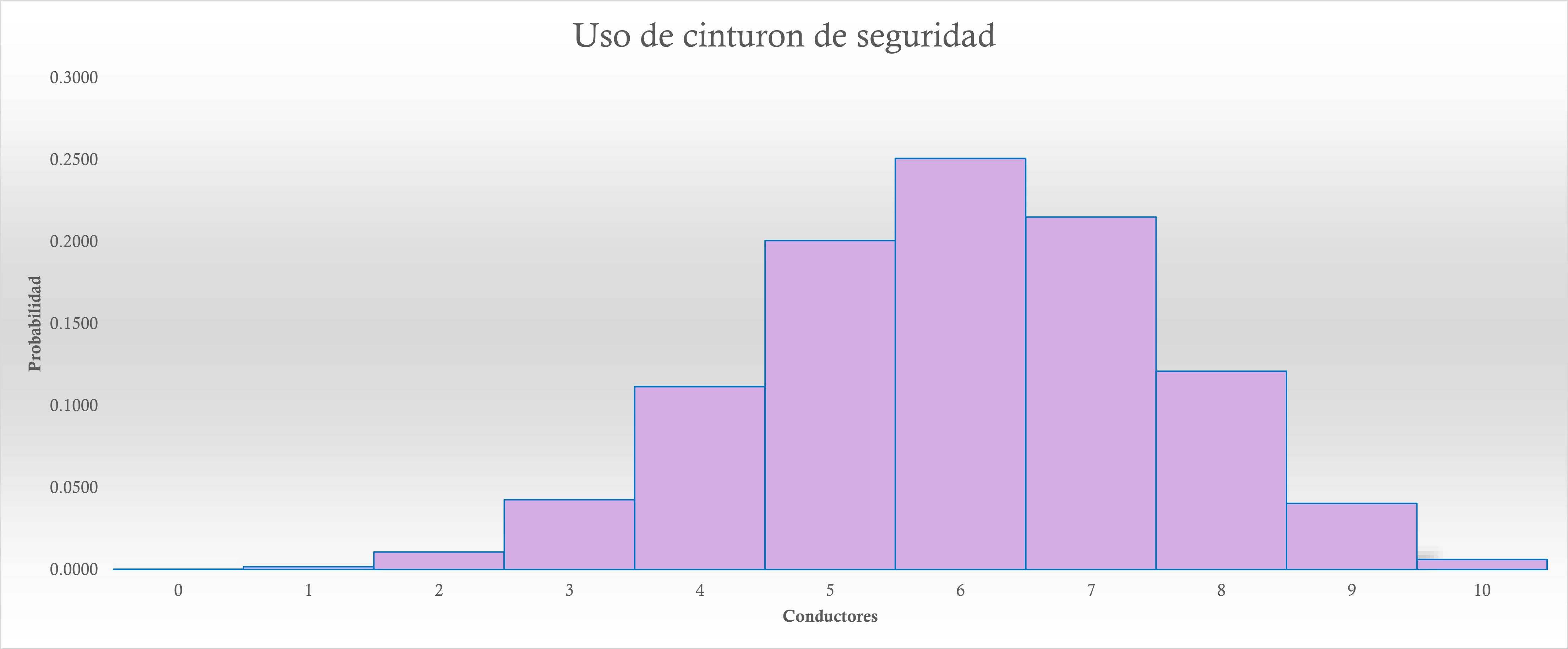
$$0.0001+0.0016+0.0106+0.0425+0.1115+0.2007+0.2508+0.2150+0.1209+0.0403+0.060=1$$

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

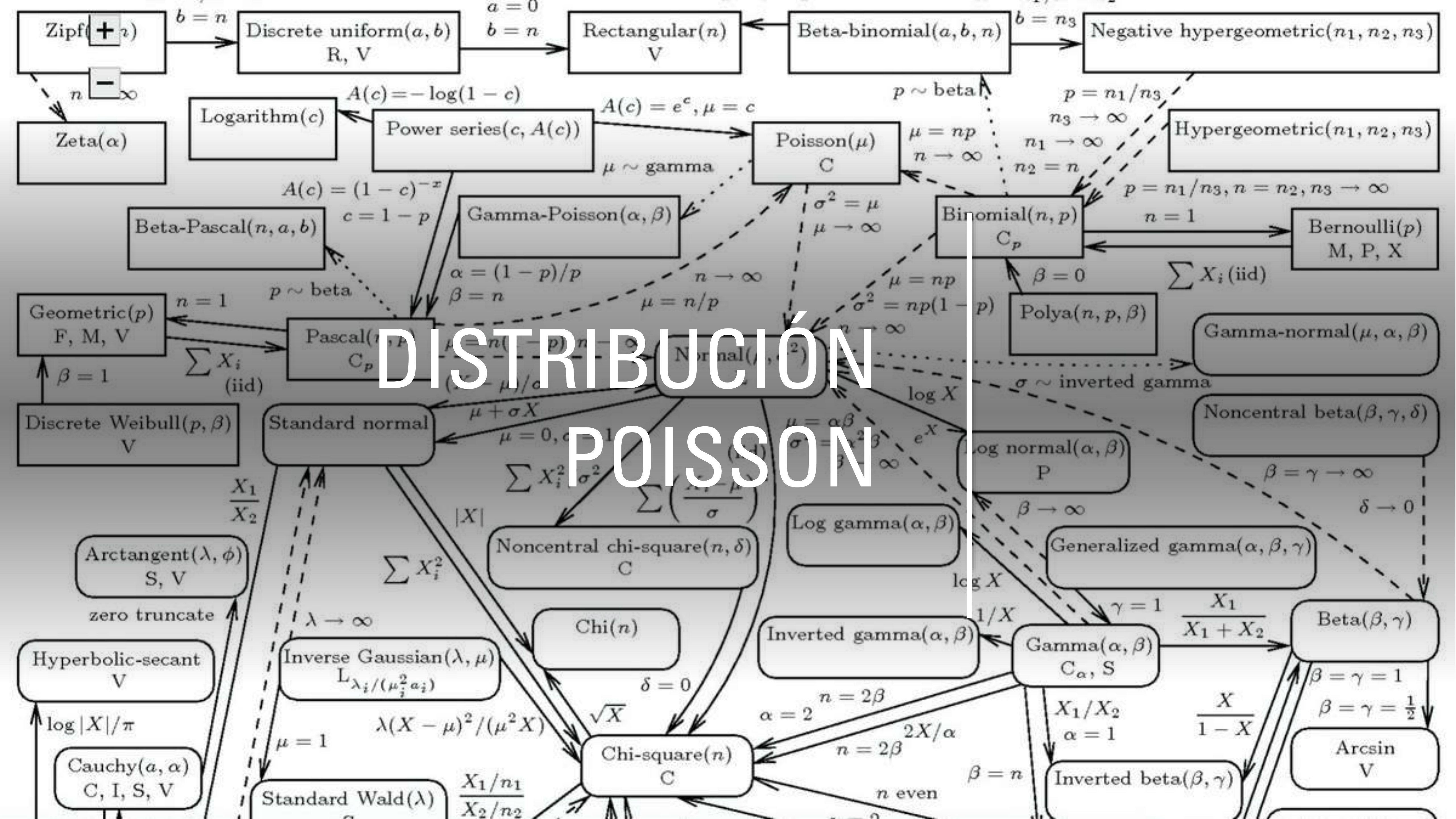
c) ¿Cuál la probabilidad de que como máximo siete de los conductores lleven el cinturón de seguridad?

- Entonces:
  - $f(8) = 10C8 \cdot (0.6)^8 \cdot (0.4)^2 = 0.1209$
  - $f(9) = 10C9 \cdot (0.6)^9 \cdot (0.4)^1 = 0.0403$
  - $f(10) = 10C10 \cdot (0.6)^{10} \cdot (0.4)^0 = 0.0060$
- $P = 1 - [f(8) + f(9) + f(10)]$
- $P = 1 - [0.1673] = 0.8327$

GRÁFICA DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD



DISTRIBUCIÓN POISSON



DISTRIBUCIÓN POISSON

- Esta distribución de probabilidad supone ciertas características:
    1. Hay un número fijo de intentos
    2. La probabilidad de un éxito es la misma para cada intento
    3. Todos los intentos son independientes

- También hay que considerar que:
    - n (número total de elementos) puede tomar valores, preferentemente, igual o mayores a 35
    - p (probabilidad de éxito) tiende a tomar valores cercanos a 0

DIFERENCIA ENTRE LAS DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y POISSON

Distribución Binomial

- $n \leq 35$
  - Es decir, la población para la aplicación de esta distribución es igual o menor a 35.
- $p \to 1$
  - Es decir, la probabilidad de éxito tiende a 1.

Distribución Poisson

- $n \geq 35$
  - Es decir, la población para la aplicación de esta distribución es igual o mayor a 35.
- $p \to 0$
  - Es decir, la probabilidad de éxito tiende a 0.

DISTRIBUCIÓN POISSON

- Para hacer el cálculo de las probabilidades de la distribución Poisson, se hace uso de la siguiente fórmula:

$$\boxed{f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}}$$

- Donde:
  - $n = total\ de\ elementos$
  - $x = elementos\ de\ éxito$
  - $p = probabilidad\ de\ éxito$
  - $e = base\ logarítmica$
  - $\lambda = n \cdot p$
  - $\lambda\ es\ llamado\ esperanza\ matemática, valor\ esperado, media\ aritmética\ o\ promedio$

EJEMPLO

- Algunos registros muestran que la probabilidad de que a un automóvil se le desinfle un neumático al atravesar cierto túnel es de 0.00005. Utilice la aproximación de Poisson a la distribución binomial para determinar la probabilidad de que entre 10 000 vehículos que pasan por este túnel:

a) exactamente a dos se les desinfle un neumático.

b) cuando menos a dos se les desinfle un neumático.

c) a lo mucho menos a dos se les desinfle un neumático.

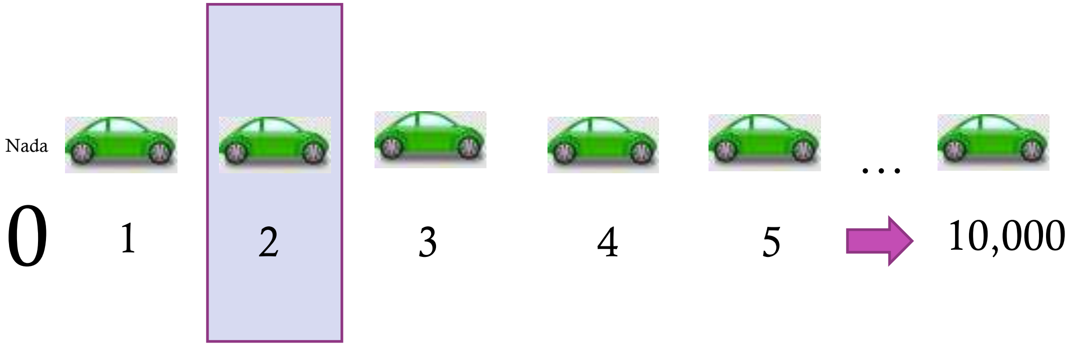
ANALIZANDO EL EJEMPLO

- Algunos registros muestran que la probabilidad de que a un automóvil se le desinfle un neumático al atravesar cierto túnel es de 0.00005. Utilice la aproximación de Poisson a la distribución binomial para determinar la probabilidad de que entre 10 000 vehículos que pasan por este túnel:

- Total de elementos
  - n = 10,000 vehículos
- Probabilidad de éxito (característica de estudio)
  - p = 0.00005 (no se trabaja con porcentaje)
- Promedio
  - $\lambda = n \cdot p = (10{,}000)(0.00005)=0.5$

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

a) exactamente a dos se les desinfle un neumático.



- Sabemos que:
  - n = 10,000 vehículos
  - p = 0.00005
  - $\lambda = n \cdot p = (10{,}000)(0.00005) = 0.5$
- Exactamente a dos se le desinfle el neumático
  - x = 2
  - Quiere decir que solo a 2.

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

- Sabemos que:
  - n = 10,000 vehículos
  - p = 0.00005
  - λ = 0.5
  - x = 2

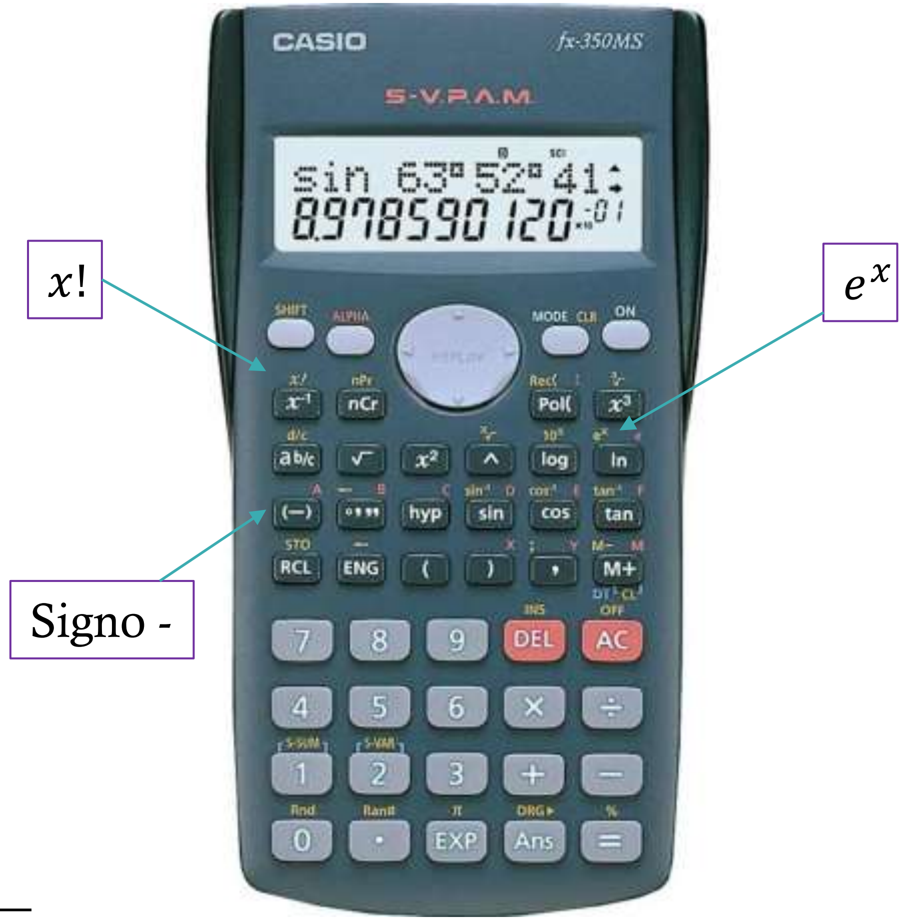
- Aplicamos fórmula:
- $f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$
- *Sustituyendo valores:*
- $f(2) = \frac{0.5^2 \cdot e^{-0.5}}{2!}$

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

- $f(2) = \frac{0.5^2 \cdot e^{-0.5}}{2!}$

- En la calculadora deberás entrar de la siguiente manera la fórmula:

- (0.5^2 x shift ln -0.5)/2!



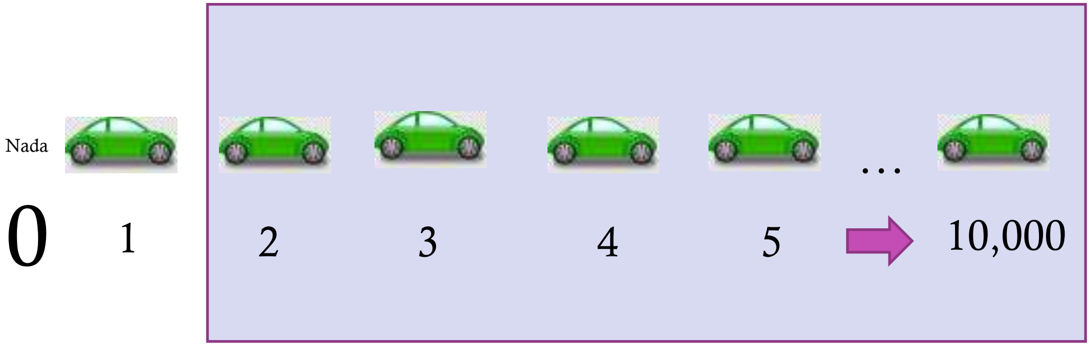
RESOLVIENDO EL EJEMPLO

a) exactamente a dos se les desinfle un neumático.

- Entonces:
- $f(2) = \frac{0.5^2 \cdot e^{-0.5}}{2!} = 0.0758$ (Redondeado a diezmilésimas)

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

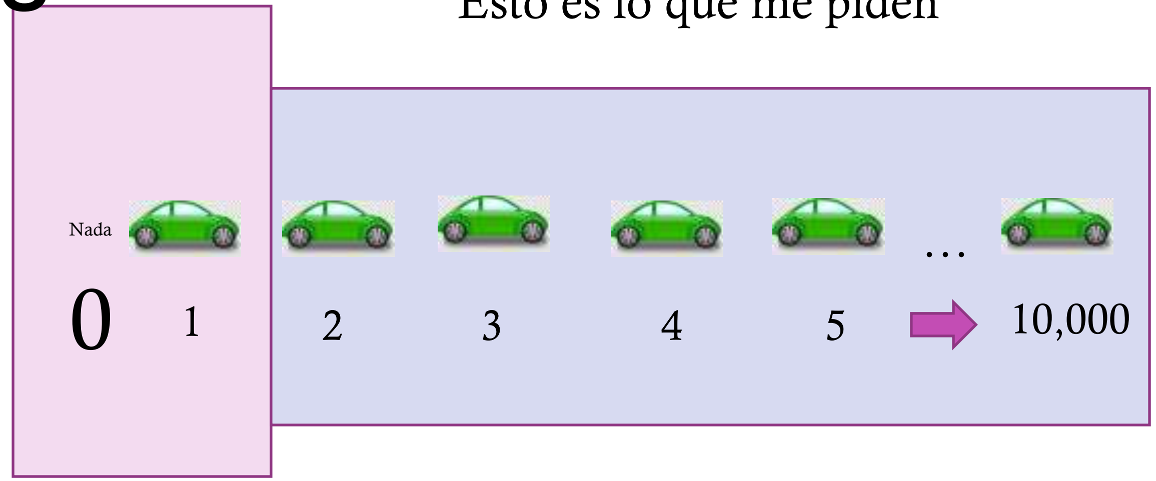
b) cuando menos a dos se les desinfle un neumático.



- Sabemos que:
  - $n = 10{,}000$ vehículos
  - $p = 0.00005$
  - $\lambda = n \cdot p = (10{,}000)(0.00005) = 0.5$
- Cuando menos a dos se le desinfle el neumático
  - $x \geq 2$
  - Quiere decir que dos o más

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

- Sabemos que:
  - n = 10,000 vehículos
  - p = 0.00005
  - $\lambda = 0.5$
  - $x \geq 2$
  - Es decir que x=2, 3, 4, 5, …, 10,000
  - No sería adecuado calcular todas esas probabilidades, por lo que sería mejor hacer el cálculo por medio de complementos.



- Entonces el complemento serían:
- x = 0
- x = 1

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

- Sabemos que:
  - n = 10,000 vehículos
  - p = 0.00005
  - $\lambda = 0.5$
  - $x \geq 2$
  - Por complemento se calcularían:
  - x = 0, 1

- Aplicamos fórmula:
- $f(x) = \frac{\lambda^{x} \cdot e^{-\lambda}}{x!}$
- *Sustituyendo valores:*
- $f(0) = \frac{0.5^{0} \cdot e^{-0.5}}{0!}$
- $f(1) = \frac{0.5^{1} \cdot e^{-0.5}}{1!}$

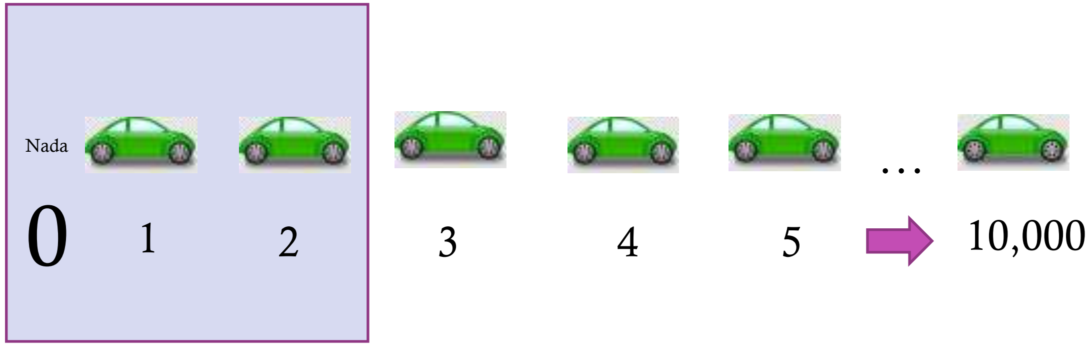
RESOLVIENDO EL EJEMPLO

b) cuando menos a dos se les desinfle un neumático.

- Entonces:
- $f(0) = \frac{0.5^0 \cdot e^{-0.5}}{0!} = 0.6065$
- $f(1) = \frac{0.5^1 \cdot e^{-0.5}}{1!} = 0.3037$
- f(0) + f(1) =0.6065+0.3037=0.9098 (Redondeado a diezmilésimas)

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

c) a lo mucho a dos se les desinfle un neumático.



- Sabemos que:
  - n = 10,000 vehículos
  - p = 0.00005
  - $\lambda = n \cdot p = (10{,}000)(0.00005) = 0.5$
- A lo mucho a dos se le desinfle el neumático
  - $x \leq 2$
  - Quiere decir que hasta dos

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

- Sabemos que:
  - n = 10,000 vehículos
  - p = 0.00005
  - $\lambda = 0.5$
  - $x \leq 2$
  - Es decir que x = 0, 1, 2

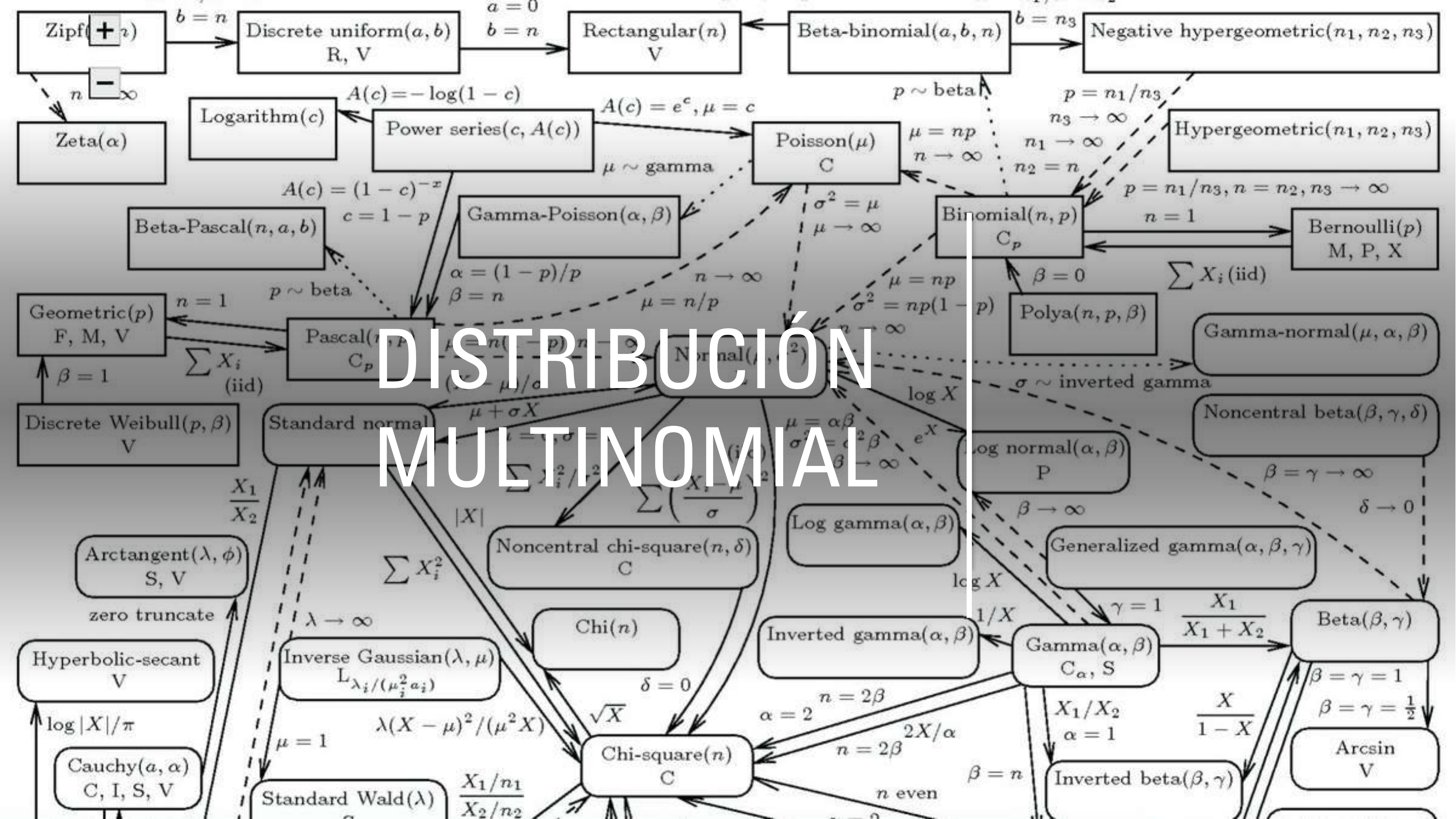
- Aplicamos fórmula:
- $f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$
- *Sustituyendo valores:*
- $f(0) = \frac{0.5^0 \cdot e^{-0.5}}{0!}$
- $f(1) = \frac{0.5^1 \cdot e^{-0.5}}{1!}$
- $f(2) = \frac{0.5^2 \cdot e^{-0.5}}{2!}$

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

c) a lo mucho a dos se les desinfle un neumático.

- Entonces:
- $f(0) = \frac{0.5^0 \cdot e^{-0.5}}{0!} = 0.6065$
- $f(1) = \frac{0.5^1 \cdot e^{-0.5}}{1!} = 0.3037$
- $f(2) = \frac{0.5^2 \cdot e^{-0.5}}{2!} = 0.0758$
- $f(0) + f(1) = 0.6065 + 0.3037 + 0.0758 = 0.9860$ (Redondeado a diezmilésimas)

DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL



DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL

- Para hacer el cálculo de las probabilidades de la distribución Multinomial, se hace uso de la siguiente fórmula:

$$\boxed{\mathrm{P} = \frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot \ldots \cdot x_k!} {p_1}^{X1} \cdot {p_2}^{X2} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{Xk}}$$

- Donde:
  - $n = total\ de\ elementos$
  - $k = resultados\ posibles$
    - $x_i = resultados\ de\ éxito\ de\ la\ clase\ i$
    - $p_i = probabilidad\ del\ resultados\ de\ la\ clase\ i$

EJEMPLO

- Según una nueva ley se plantea la donación de órganos de los cuales existe una probabilidad de que el 15% estén en contra, el 40% sean indiferentes a la ley y el 45% estén a favor, si se extrae una muestra aleatoria de 20 sujetos. ¿Cuál es la probabilidad de que 5 estén en contra, 10 sean indiferentes y 5 estén a favor?

ANALIZANDO EL EJEMPLO

- Según una nueva ley se plantea la donación de órganos de los cuales existe una probabilidad de que el 15% estén en contra, el 40% sean indiferentes a la ley y el 45% estén a favor, si se extrae una muestra aleatoria de 20 sujetos. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 estén en contra, 10 sean indiferentes y 7 estén a favor?

- Total de elementos de la población
  - n = 20 sujetos

Característica	Probabilidad	Éxitos
En contra	$p1 = 15\%$	x1=3
Indiferentes	$p2 = 40\%$	x2=10
A favor	$p3 = 15\%$	x3=7
suma	P = 100%	n= 20

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

- Sabemos que:
  - Recuerda que no hay que trabajar por porcentajes en la probabilidad, por lo que hay que quitarlos. Entonces:

Característic a	**Probabilidad**	**Éxitos**
En contra	$p1 = 0.15$	x1=3
Indiferentes	$p2 = 0.40$	x2=10
A favor	$p3 = 0.45$	x3=7
suma	P = 1.00	n= 20

- Aplicamos fórmula:
- $\mathrm{P} = \frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot \ldots \cdot x_k!} {p_1}^{X1} \cdot {p_2}^{X2} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{Xk}$
- *Sustituyendo valores:*
- $\mathrm{P} = \frac{20!}{3! \cdot 10! \cdot 7!} 0.15^3 \cdot 0.40^{10} \cdot 0.45^7$

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

- $P = \frac{20!}{3! \cdot 10! \cdot .. \cdot 7!} 0.15^3 \cdot 0.40^{10} \cdot 0.45^7$

- En la calculadora deberás entrar de la siguiente manera la fórmula:

$x!$

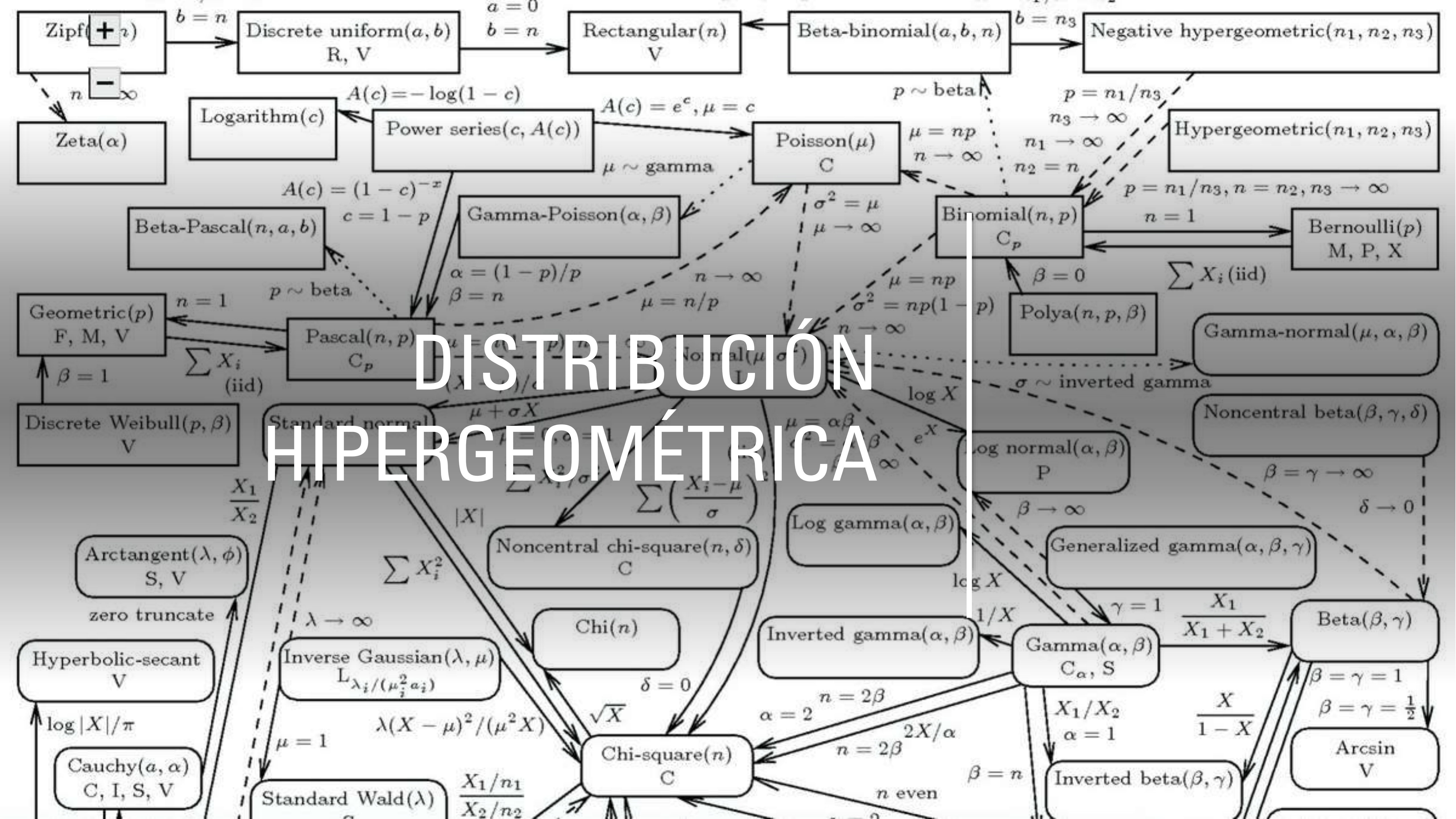
$(20\ shift\ x! * 0.15\text{^}3 * 0.40\text{^}10 * 0.45\text{^}7)/(3shiftx! * 10shiftx! * 7shiftx!)$

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

La probabilidad de 3 estén en contra, 10 sean indiferentes y 7 estén a favor es:

- $P = \frac{20!}{3! \cdot 10! \cdot .. \cdot 7!} 0.15^3 \cdot 0.40^{10} \cdot 0.45^7 = 0.0293$ (Redondeado a diezmilésimas)

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA



DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

- Para hacer el cálculo de las probabilidades de la distribución Hipergeométrica, se hace uso de la siguiente fórmula:

$$\boxed{f(x) = \frac{aCx \cdot bC(n-x)}{NCn}}$$

- Donde:
  - N$=$ $total\ de\ elementos\ de\ la\ población$
  - $n = total\ de\ elementos\ de\ la\ muestra$
  - $x = elementos\ de\ éxito$
  - $a = elementos\ con\ la\ característica\ de\ estudio$
  - $b = elementos$ sin $la\ característica\ de\ estudio$
  - $aCx = combinación\ de\ a\ tomando\ x\ elementos$
  - $bC(n-x) = combinacióndе\ b\ tomando\ n-x\ elementos$
  - $NCn = combinación\ de\ N\ tomando\ n\ elementos$

EJEMPLO

- Entre los 16 camiones de reparto de una tienda de departamentos, 5 tienen frenos gastados. Si se seleccionan al azar 8 camiones para realizar una inspección, ¿cuál es la probabilidad de que esta muestra incluya:

a) exactamente 3 camiones con los frenos gastados?

b) cuando menos 3 camiones con los frenos gastados?

c) cuando mucho 3 camiones con los frenos gastados?

ANALIZANDO EL EJEMPLO

- Entre los 16 camiones de reparto de una tienda de departamentos, 5 tienen frenos gastados. Si se seleccionan al azar 8 camiones para realizar una inspección…

- Total de elementos de la población
  - N = 16 camiones
- Total de elementos con la característica de estudio
  - a = 5 camiones con frenos gastados
- Total de elementos sin la característica de estudio
  - b = 11 camiones sin frenos gastados
- Total de elementos de la muestra
  - n = 8 camiones seleccionados

a b

Ninguno N

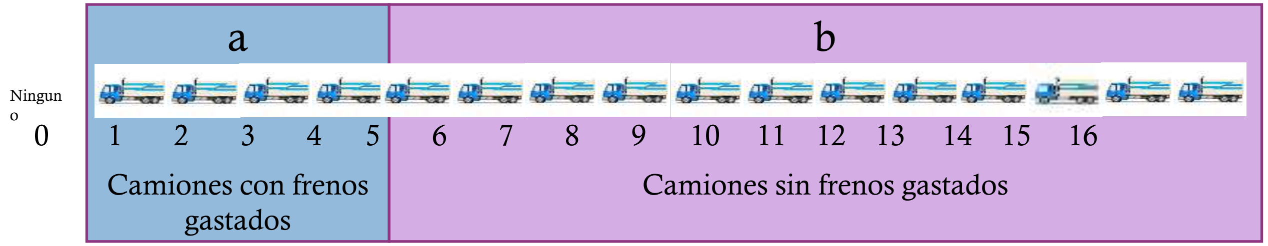
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Camiones con frenos gastados

Camiones sin frenos gastados

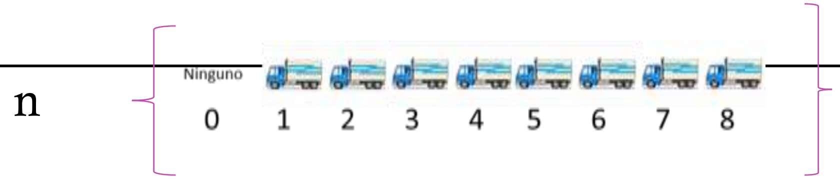
RESOLVIENDO EL EJEMPLO

- a) ¿cuál es la probabilidad de que esta muestra incluya exactamente 3 camiones con los frenos gastados?



De estos 16 camiones vamos a seleccionar 8. Recuerda que cuando se seleccionan elementos de una población se tienen que hacer permutaciones o combinaciones. En esta distribución solo se utilizan combinaciones.

- Sabemos que:
  - N = 16 camiones
  - a = 5 camiones con frenos gastados
  - b = 11 camiones con frenos gastados
  - n = 8 camiones seleccionados
- Exactamente tres tengan frenos gastados
  - x = 3
  - Quiere decir que solo 3 camiones



Pero, ¿cuántos de estos 8 tienen frenos gastados?

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

- Sabemos que:
  - N = 16 camiones
  - a = 5 camiones con frenos gastados
  - b = 11 camiones con frenos gastados
  - n = 8 camiones seleccionados
  - x = 3 camiones con frenos gastados
  - $n - x = 8 - 3 = 5$
  - NOTA: x tiene que estar en base a a

- Aplicamos fórmula:
- $\mathrm{f}(x) = \frac{aCx \cdot bC(n-x)}{NCn}$
- *Sustituyendo valores:*
- $f(3) = \frac{5C3 \cdot 11C5)}{16C8}$

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

- $f(3) = \frac{5C3 \cdot 11C5)}{16C8}$

- En la calculadora deberás entrar de la siguiente manera la fórmula:

- (5nCr3 x 11nCr5)/16nCr8

nCr

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

a) La probabilidad de que esta muestra incluya exactamente a tres camiones con los frenos gastados.

- Entonces:
- $f(3) = \frac{5C3 \cdot 11C5)}{16C8} = 0.3590$ (Redondeado a diezmilésimas)

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

b) ¿cuál es la probabilidad de que esta muestra incluya cuando menos 3 camiones con los frenos gastados?

- Sabemos que:
  - N = 16 camiones
  - a = 5 camiones con frenos gastados
  - b = 11 camiones con frenos gastados
  - n = 8 camiones seleccionados
- Cuando menos tres tengan frenos gastados
  - $x \geq 3$
  - Quiere decir que al menos 3 camiones o más

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

- Sabemos que:
  - N = 16 camiones
  - a = 5 camiones con frenos gastados
  - b = 11 camiones con frenos gastados
  - n = 8 camiones seleccionados
  - $x \geq 3$
    - X = 3
    - X = 4
    - X = 5 (este es el tope de la característica de estudio) No hay más de 5 camiones con frenos gastados.

- Aplicamos fórmula:
- $f(x) = \frac{aCx \cdot bC(n-x)}{NCn}$
- *Sustituyendo valores para la primera opción:*
- $f(3) = \frac{5C3 \cdot 11C5}{16C8}$
- $f(4) = \frac{5C4 \cdot 11C4}{16C8}$
- $f(5) = \frac{5C5 \cdot 11C6}{16C8}$

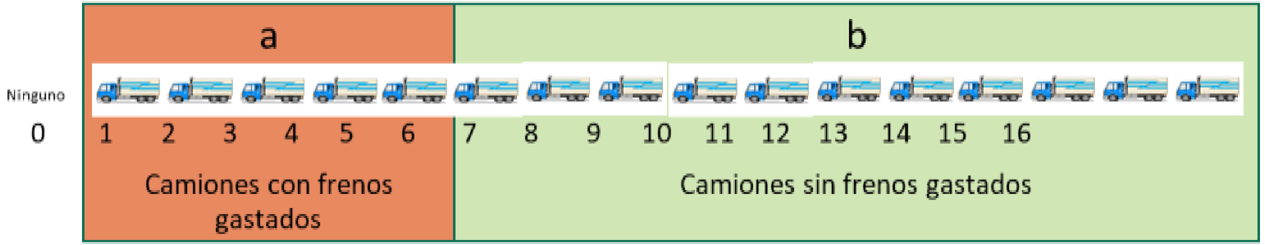
RESOLVIENDO EL EJEMPLO

b) La probabilidad de que esta muestra incluya cuando menos a tres camiones con los frenos gastados.

- Entonces:
- $f(3) = \frac{5C3 \cdot 11C5}{16C8} = 0.3590$
- $f(4) = \frac{5C4 \cdot 11C4}{16C8} = 0.1282$
- $f(5) = \frac{5C5 \cdot 11C6}{16C8} = 0.0128$
- $f(3) + f(4) + f(5) = 0.5000$ (Redondeado a diezmilésimas)

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

c) ¿cuál es la probabilidad de que esta muestra incluya cuando mucho 3 camiones con los frenos gastados?



- Sabemos que:
  - N = 16 camiones
  - a = 5 camiones con frenos gastados
  - b = 11 camiones con frenos gastados
  - n = 8 camiones seleccionados
- Cuando mucho tres tengan frenos gastados
  - $x \leq 3$
  - Quiere decir que son 3 camiones o menos

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

- Sabemos que:
  - N = 16 camiones
  - a = 5 camiones con frenos gastados
  - b = 11 camiones con frenos gastados
  - n = 8 camiones seleccionados
  - $x \leq 3$
    - X = 0
    - X = 1
    - X = 2
    - X = 3

- Aplicamos fórmula:
- $\mathrm{f}(x) = \frac{aCx \cdot bC(n-x)}{NCn}$
- *Sustituyendo valores para la primera opción:*
- $f(0) = \frac{5C0 \cdot 11C8}{16C8}$
- $f(1) = \frac{5C1 \cdot 11C7}{16C8}$
- $f(2) = \frac{5C2 \cdot 11C6}{16C8}$
- $f(3) = \frac{5C3 \cdot 11C5}{16C8}$

RESOLVIENDO EL EJEMPLO

b) La probabilidad de que esta muestra incluya cuando mucho a tres camiones con los frenos gastados.

- Entonces:
- $f(0) = \frac{5C0 \cdot 11C8}{16C8} = 0.0128$
- $f(1) = \frac{5C1 \cdot 11C7}{16C8} = 0.1282$
- $f(2) = \frac{5C2 \cdot 11C6}{16C8} = 0.3590$
- $f(3) = \frac{5C3 \cdot 11C5}{16C8} = 0.3590$
- $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 0.8590$ (Redondeado a diezmilésimas)