UNIDAD 3. FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

Probabilidad y Estadística

SUBTEMAS

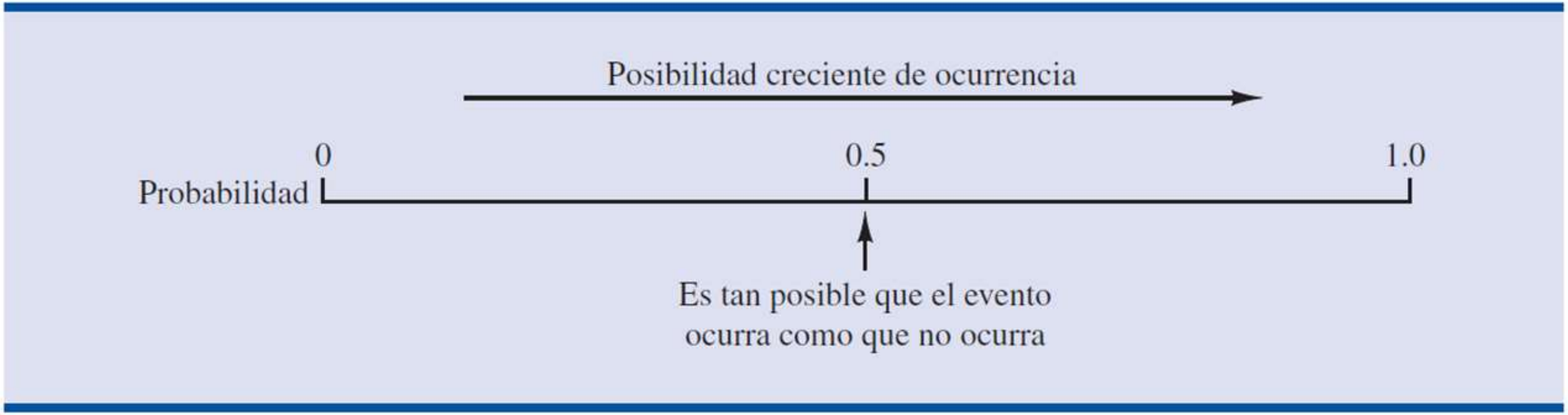
- 3.1 Concepto clásico y como frecuencia relativa.
- 3.2 Axiomas y teoremas.
- 3.3 Probabilidad clásica: Espacio finito equiparable.
- 3.4 Probabilidad condicional e independencia.
- 3.5 Teorema de Bayes.
- 3.6 Distribución Marginal Conjunta.

TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

PROBABILIDAD

- La **probabilidad** es una medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento. Por tanto, las probabilidades son una medida del grado de incertidumbre asociado con cada uno de los eventos previamente enunciados. Si cuenta con las probabilidades, tiene la capacidad de determinar la posibilidad de ocurrencia que tiene cada evento.
- Los valores de probabilidad se encuentran en una escala de 0 a 1.
- Los valores cercanos a 0 indican que las posibilidades de que ocurra un evento son muy pocas.
- Los cercanos a 1 indican que es casi seguro que ocurra un evento.
- Otras probabilidades entre cero y uno representan distintos grados de posibilidad de que ocurra un evento.

FIGURA 4.1 PROBABILIDAD COMO MEDIDA NUMÉRICA DE LA POSIBILIDAD DE QUE UN EVENTO OCURRA



PROBABILIDAD

- La fórmula para calcular la probabilidad es:

$$P = \frac{s}{n}$$

- Donde:
- $P = probabilidad$
- $n = total\ de\ posibilidades\ o\ resultados\ de\ un\ experimento\ dado$
- $s = posibilidades\ de\ éxitos$

REQUERIMIENTOS BÁSICOS PARA LA ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

1. La probabilidad asignada a cada resultado experimental debe estar entre 0 y 1, inclusive. Si denota con E_i el i-ésimo resultado experimental y con $P(E_i)$ su probabilidad, entonces exprese este requerimiento como

$$0 \leq P(E_i) \leq 1 \text{ para toda } i \tag{4.3}$$

2. La suma de las probabilidades de los resultados experimentales debe ser igual a 1.0. Para resultados experimentales n escriba este requerimiento como

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) = 1 \tag{4.4}$$

LEYES DE LA PROBABILIDAD

1. La probabilidad del suceso de un espacio muestral es 1. Es decir; $P(S) = 1$
2. La probabilidad de un evento complemento es $P(A') = 1 - P(A)$

LEY DE LA ADICIÓN

3. La probabilidad de la unión de dos eventos mutuamente excluyentes es:
   3. $P(AUB) = P(A) + P(B)$
4. La probabilidad de la unión de dos eventos que no son mutuamente excluyentes es:
   - $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. La probabilidad de la unión de tres eventos mutuamente excluyentes es:
   - $P(AUB) = P(A) + P(B) + P(C)$
6. La probabilidad de la unión de tres eventos que no son mutuamente excluyentes es:
   - $P(AUBUC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

- Con frecuencia, en la probabilidad de un evento influye el hecho de que un evento relacionado con él ya haya ocurrido. Suponga que tiene un evento *A* cuya probabilidad es $P(A)$**.** Si obtiene información nueva y sabe que un evento relacionado con él, denotado por *B*, ya ha ocurrido, deseará aprovechar esta información y volver a calcular la probabilidad del evento *A.* A esta nueva probabilidad del evento *A* se le conoce como **probabilidad condicional** y se expresa $P(A \mid B)$.
- La notación | indica que se está considerando la probabilidad del evento *A* *dada* la condición de que el evento *B* ha ocurrido. Por tanto, la notación $P(A \mid B)$ se lee “la probabilidad de *A* dado *B*”.

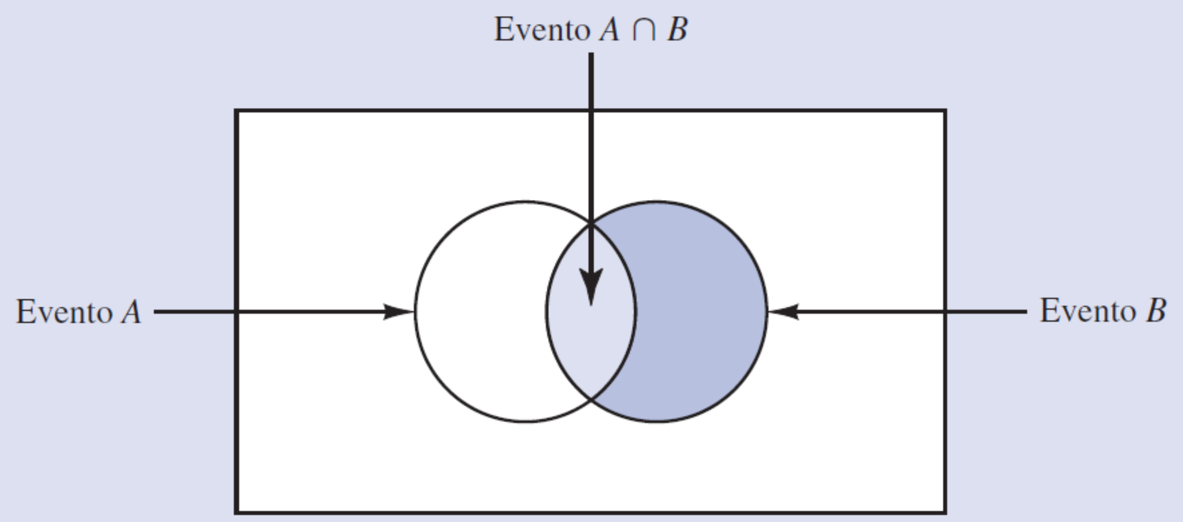
PROBABILIDAD CONDICIONAL

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{4.7}$$

o

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{4.8}$$

FIGURA 4.8 PROBABILIDAD CONDICIONAL $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$



EVENTOS INDEPENDIENTES

- Si la probabilidad de un evento A no cambia por la existencia del evento B —*es decir, si* $P(A \mid B) = P(A)$—, entonces los eventos A y B son **eventos independientes**.
- Esto lleva a la definición de la independencia de dos eventos.

EVENTOS INDEPENDIENTES

Dos eventos A y B son independientes si

$$P(A \mid B) = P(A) \tag{4.9}$$

o

$$P(B \mid A) = P(B) \tag{4.10}$$

Si no es así, los eventos son dependientes.

LEYES DE LA PROBABILIDAD

LEY DE LA MULTIPLICACIÓN

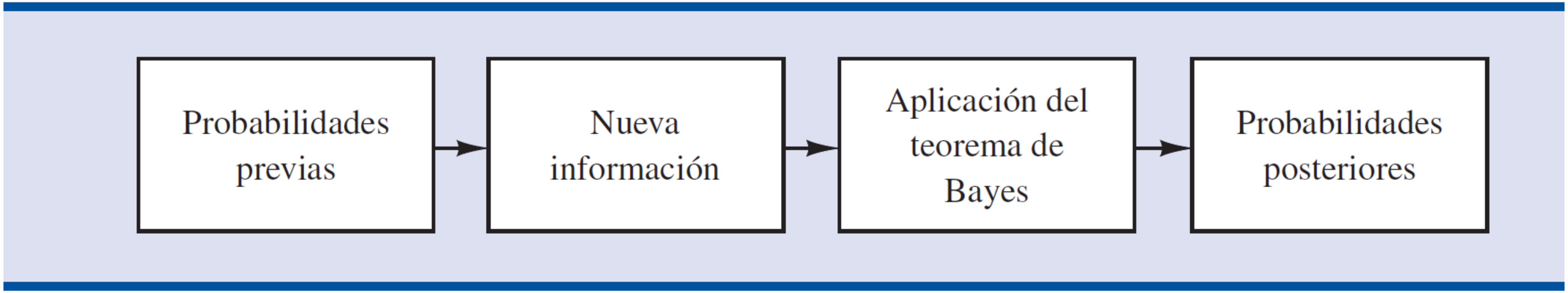
7. La probabilidad de la intersección de dos eventos dependientes:
   - $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \backslash B)$
   - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \backslash \mathrm{A})$
8. La probabilidad de la intersección de dos eventos independientes:
   - $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$
   - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

TEOREMA DE BAYES

- En el estudio de la probabilidad condicional vio que revisar las probabilidades cuando se obtiene más información es parte importante del análisis de probabilidades. Por lo general, se suele iniciar el análisis con una estimación de probabilidad inicial o **probabilidad previa** de los eventos que interesan. Después, de fuentes como una muestra, una información especial o una prueba del producto, se obtiene más información sobre estos eventos. Dada esta nueva información, se modifican o revisan los valores de probabilidad mediante el cálculo de probabilidades revisadas a las que se les conoce como **probabilidades posteriores**. El **teorema de Bayes** es un medio para calcular estas probabilidades.

TEOREMA DE BAYES

FIGURA 4.9 REVISIÓN DE LA PROBABILIDAD USANDO EL TEOREMA DE BAYES



TEOREMA DE BAYES

- Considerando las probabilidades condicionales:

$$P(A\backslash \mathrm{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{y} \qquad P(B\backslash \mathrm{A}) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

- Como $P(A \cap B) = P(B \cap A)$, se despeja de las dos ecuaciones:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A\backslash \mathrm{B}) \qquad \text{y} \qquad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\backslash \mathrm{A})$$

- Se igualan las dos ecuaciones:

$$P(B) \cdot P(A\backslash \mathrm{B}) = P(A) \cdot P(B\backslash \mathrm{A})$$

- Se puede despejar cualquier probabilidad condicional, en este caso P(A\B):

$$P(A\backslash \mathrm{B}) = \frac{P(A) \cdot P(B\backslash \mathrm{A})}{P(B)}$$

TEOREMA DE BAYES Y TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

$$P(A_i \backslash \mathrm{B}) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \backslash A_i)}{P(B)}$$

Donde:

$P(A_i)$ = Probabilidad a priori
$P(B \backslash A_i)$ = Probabilidad condicional
$P(A_i \backslash \mathrm{B})$=Probabilidad a posteriori
$P(B)$=Probabilidad total

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \backslash A_i)$$

TEOREMA DE BAYES

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)} \qquad \textbf{(4.19)}$$