UNIDAD 4. PROBABILIDAD Y TEORÍA DE CONJUNTOS

Estadística para la Administración

SUBTEMAS

- 4.1. Aspectos generales de la probabilidad (Conceptos, tipos de probabilidad y enfoques).
- 4.2. Leyes de la probabilidad.
- 4.3. Aplicaciones de la probabilidad en la administración.
- 4.4. Árboles de probabilidad.
- 4.5. Teorema de Bayes.
- 4.6. Teoría de conjuntos aplicados en la administración.

TEORÍA DE CONJUNTOS

ESPACIO MUESTRAL

- En la teoría de probabilidades, el espacio muestral o espacio de muestreo consiste en el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, junto con una estructura sobre el mismo.

Números enteros del 1 al 20

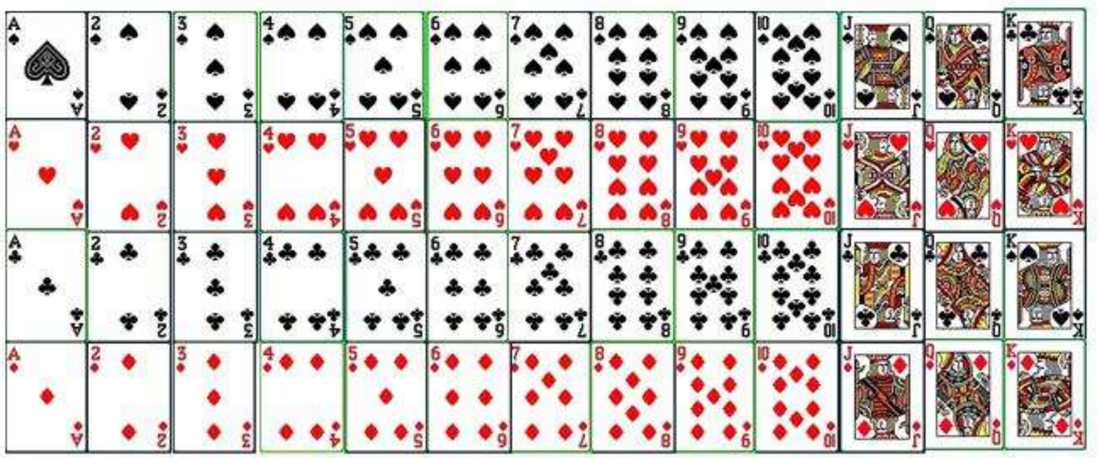
$$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$$

S

1 2 3 4 5 6 7 8
9 10 11 12 13 14
15 16 17 18 19 20

Diagrama de Venn

Las 52 cartas de una baraja inglesa



EVENTO

- En la teoría de la probabilidad, un **evento** aleatorio o fuente de sucesos aleatorio es un **subconjunto** de un espacio muestral, es decir, un conjunto de posibles resultados que se pueden dar en un posible pero muy lejano experimento aleatorio.

Número pares

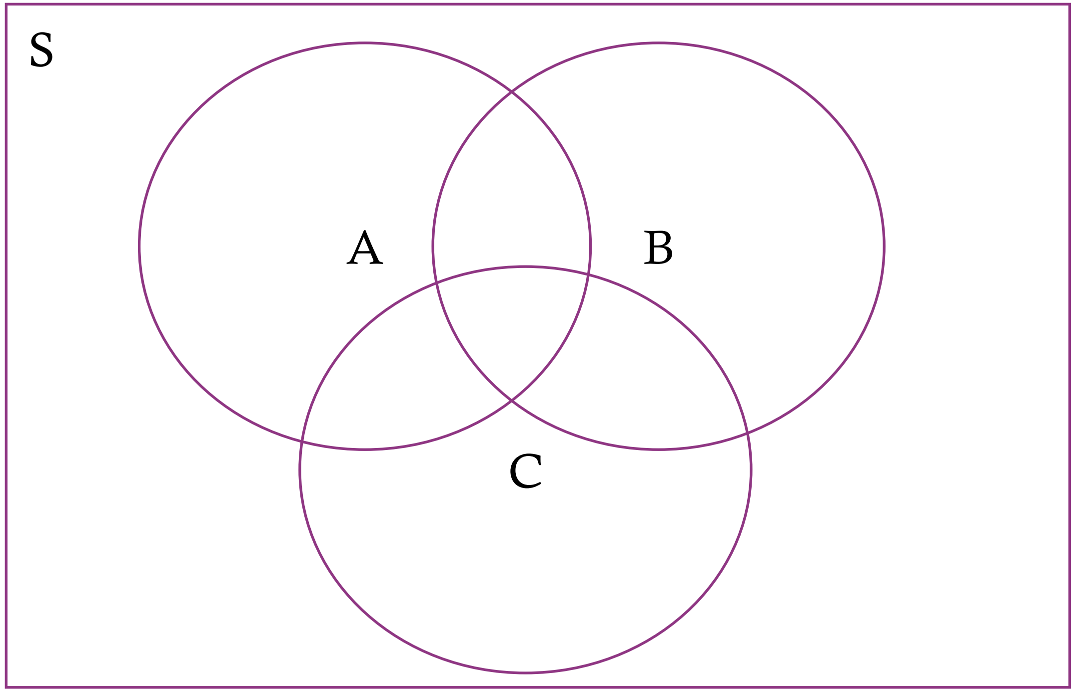
$$A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$$

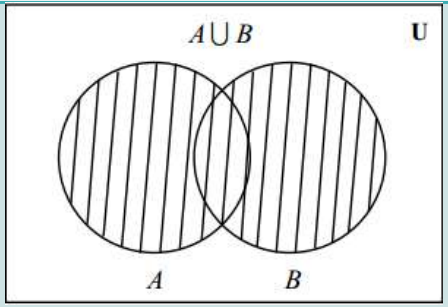
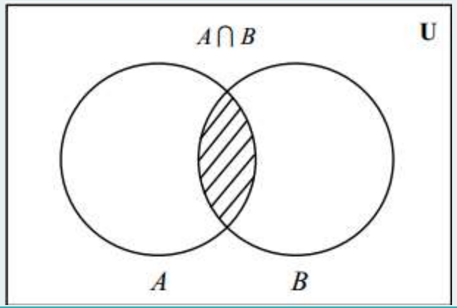
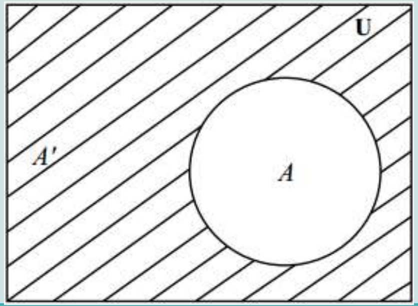
Número nones

$$B = \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$$

Número múltiplos de 3

$$C = \{3,6,9,12,15,18\}$$



EVENTO	DENOTACIÓN	DIAGRAMA DE VENN
UNIÓN está formado por todos los elementos de cada uno de los eventos a unir sin repetir ninguno.	$AUB = \{x \mid x \in A \quad o \quad x \in B\}$	
INTERSECCIÓN está compuesto por los elementos comunes entre los eventos que se intersecan.	$AUB = \{x \mid x \in A \quad y \quad x \in B\}$	
COMPLEMENTO está compuesto por todos los elementos del espacio muestral que no están en el evento a complementar.	$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$	

Números enteros del 1 al 20

$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$

Número pares

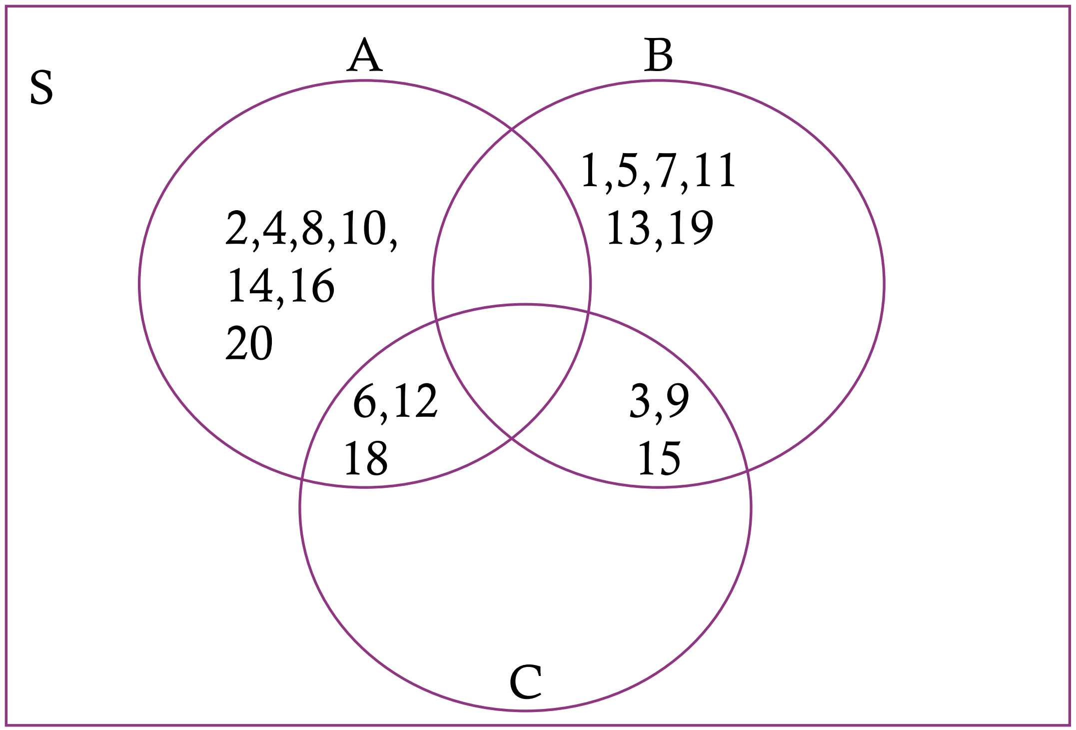
$A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$

Número nones

$B = \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$

Número múltiplos de 3

$C = \{3,6,9,12,15,18\}$



TÉCNICAS DE CONTEO

MULTIPLICACIÓN DE OPCIONES

- Si una selección consta de K pasos, de los cuales el primero se puede efectuar de n_1 maneras, el segundo de n_2 maneras… y para cada una de estas, la $k^{ésima}$ se puede realizar de n_k maneras, entonces la selección total se puede hacer de $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$ maneras.
- Ejemplo:

  En un estudio médico, se clasifican a los pacientes de acuerdo con el tipo de sangre que tengan ya sea tipo A, B AB u O, a su tipo de presión sanguínea, ya sea baja, normal o alta y también a su Rh, ya sea positiva o negativa. ¿De cuántas maneras se puede clasificar a un paciente?

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24\, maneras$$

PERMUTACIONES

- El número de permutaciones de n objetos distintos es $n!$
- Ejemplo:

  ¿De cuántas maneras se pueden formar siete personas?

  n = 7

$$7! = 5{,}040\ maneras$$

PERMUTACIONES

- El número de permutaciones de n objetos distintos ordenados en círculo es $(n-1)!$
- Ejemplo:

  ¿De cuántas maneras se pueden sentar en una mesa redonda siete personas si nos interesa saber quién está al lado de quién?

  n = 7

$$(7-1)! = 6! = 720 \; maneras$$

PERMUTACIONES

- El número de permutaciones de r objetos seleccionados de un conjunto de n objetos distintos es $\frac{n!}{(n-r)!}$
- Ejemplo:

  ¿De cuántas formas pueden llegar en primero, segundo y tercer lugar diez corredores de 100 metros planos, si todos tienen las mismas probabilidades de ganar?

  n = 7

  r = 3

$$\frac{10!}{(10-3)!} = 720\ maneras$$

PERMUTACIONES

- El número de permutaciones de n objetos distintos considerando que existen k grupos es $\frac{n!}{(n1!\cdot n2!\cdot \ldots \cdot nk!)}$
- Ejemplo:

  ¿De cuántas maneras se pueden plantar en el límite de una propiedad tres robles, cuatro pirules y dos abetos?

  $n = 9$

  $n_1 = 3$

  $n_2 = 4$

  $n_3 = 2$

$$\frac{9!}{(3!\,4!\,2!)} = 1{,}260\ maneras$$

COMBINACIONES

- El número de permutaciones de r objetos seleccionados de un conjunto de n objetos distintos es $\frac{n!}{r!(n-r)!}$
- Ejemplo:

  ¿De cuántas maneras puede una persona seleccionar tres libros de una lista de ocho best-sellers?

  n = 8

  r = 3

$$\frac{8!}{3!\,(8-3)!} = 56\ maneras$$

DIFERENCIAS ENTRE PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

- El número de permutaciones de r objetos seleccionados de un conjunto de n objetos distintos es $\frac{n!}{(n-r)!}$
- Las permutaciones tienen orden al ser seleccionados:

  Selección de dos personas **para lavar y secar**

- El número de permutaciones de r objetos seleccionados de un conjunto de n objetos distintos es $\frac{n!}{r!(n-r)!}$
- Las combinaciones no considera el orden para selección:
  - Selección de dos personas

DIFERENCIAS ENTRE PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

- Las permutaciones tienen orden al ser seleccionados:

  Entre tres personas, selección de dos personas **para lavar y secar**

  $$\frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

  En este caso nos interesa cómo se van a seleccionar las dos personas

- Las combinaciones no considera el orden para selección:
  - Entre tres personas, selección de dos personas

  $$\frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$$

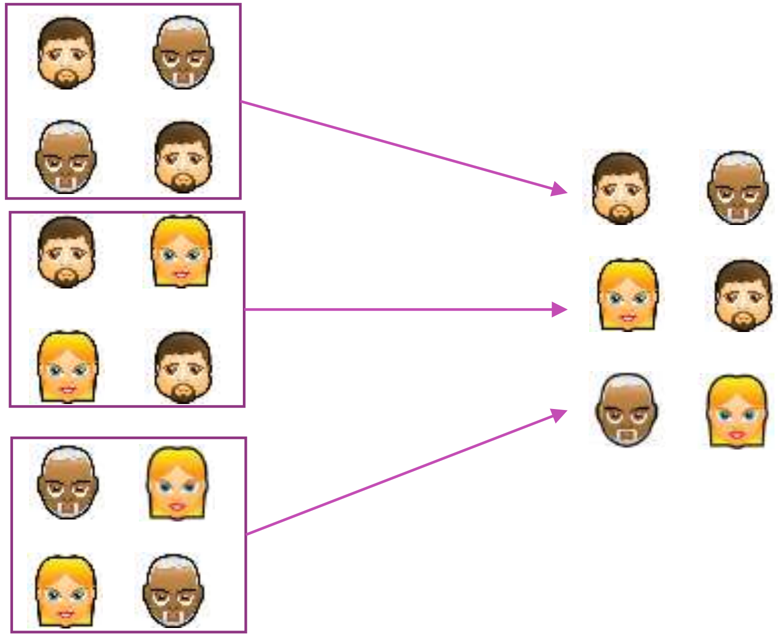
  En este caso no nos interesa cómo se van a seleccionar las dos personas.

DIFERENCIAS ENTRE PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

- Permutaciones

- Combinaciones

- Observa que cada cuadro en las permutaciones significa una combinación.
- Importa cómo se seleccionan.



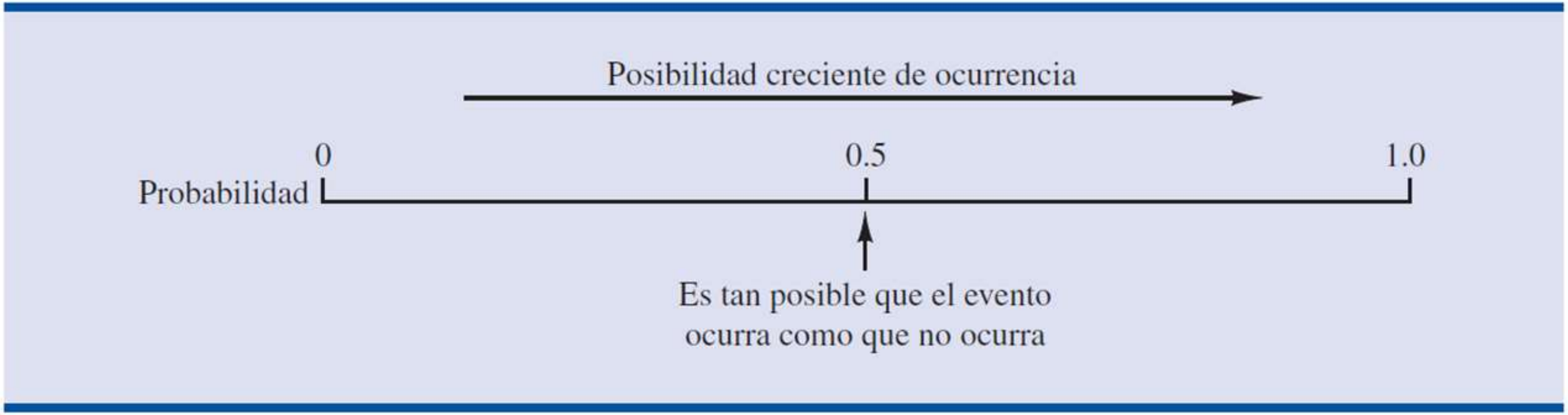
- No importa cómo se seleccionan.

TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

PROBABILIDAD

- La **probabilidad** es una medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento. Por tanto, las probabilidades son una medida del grado de incertidumbre asociado con cada uno de los eventos previamente enunciados. Si cuenta con las probabilidades, tiene la capacidad de determinar la posibilidad de ocurrencia que tiene cada evento.
- Los valores de probabilidad se encuentran en una escala de 0 a 1.
- Los valores cercanos a 0 indican que las posibilidades de que ocurra un evento son muy pocas.
- Los cercanos a 1 indican que es casi seguro que ocurra un evento.
- Otras probabilidades entre cero y uno representan distintos grados de posibilidad de que ocurra un evento.

FIGURA 4.1 PROBABILIDAD COMO MEDIDA NUMÉRICA DE LA POSIBILIDAD DE QUE UN EVENTO OCURRA



PROBABILIDAD

- La fórmula para calcular la probabilidad es:

$$P = \frac{s}{n}$$

- Donde:
- $P = probabilidad$
- $n = total\ de\ posibilidades\ o\ resultados\ de\ un\ experimento\ dado$
- $s = posibilidades\ de\ éxitos$

REQUERIMIENTOS BÁSICOS PARA LA ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

1. La probabilidad asignada a cada resultado experimental debe estar entre 0 y 1, inclusive. Si denota con E_i el i-ésimo resultado experimental y con $P(E_i)$ su probabilidad, entonces exprese este requerimiento como

$$0 \leq P(E_i) \leq 1 \text{ para toda } i \tag{4.3}$$

2. La suma de las probabilidades de los resultados experimentales debe ser igual a 1.0. Para resultados experimentales n escriba este requerimiento como

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) = 1 \tag{4.4}$$

LEYES DE LA PROBABILIDAD

1. La probabilidad del suceso de un espacio muestral es 1. Es decir; $P(S) = 1$
2. La probabilidad de un evento complemento es $P(A') = 1 - P(A)$

LEY DE LA ADICIÓN

3. La probabilidad de la unión de dos eventos mutuamente excluyentes es:
   3. $P(AUB) = P(A) + P(B)$
4. La probabilidad de la unión de dos eventos que no son mutuamente excluyentes es:
   - $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. La probabilidad de la unión de tres eventos mutuamente excluyentes es:
   - $P(AUB) = P(A) + P(B) + P(C)$
6. La probabilidad de la unión de tres eventos que no son mutuamente excluyentes es:
   - $P(AUBUC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

- Con frecuencia, en la probabilidad de un evento influye el hecho de que un evento relacionado con él ya haya ocurrido. Suponga que tiene un evento A cuya probabilidad es $P(A)$**.** Si obtiene información nueva y sabe que un evento relacionado con él, denotado por B, ya ha ocurrido, deseará aprovechar esta información y volver a calcular la probabilidad del evento A. A esta nueva probabilidad del evento A se le conoce como **probabilidad condicional** y se expresa $P(A \mid B)$.
- La notación | indica que se está considerando la probabilidad del evento A *dada* la condición de que el evento B ha ocurrido. Por tanto, la notación $P(A \mid B)$ se lee “la probabilidad de A dado B”.

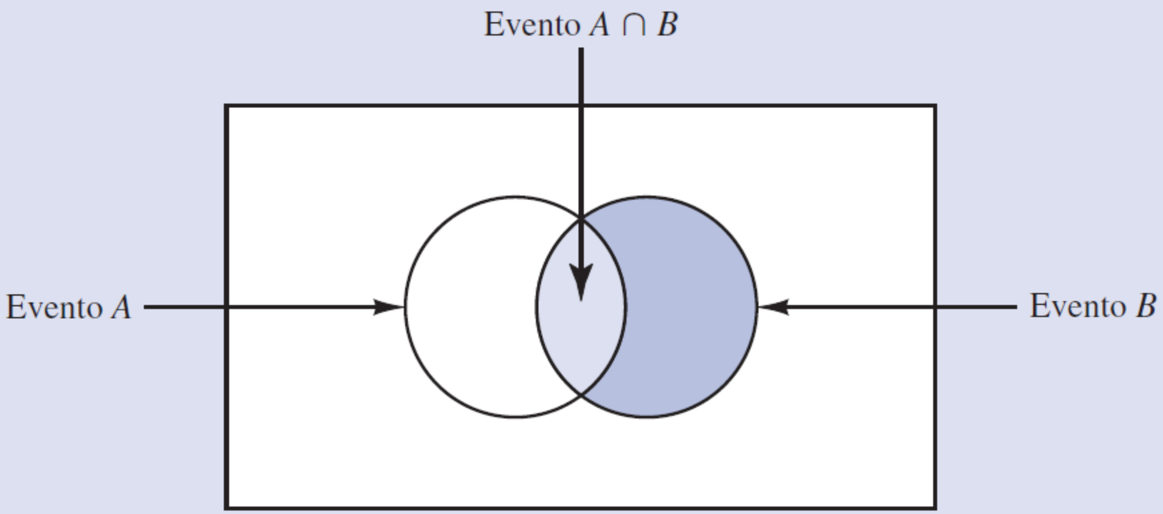
PROBABILIDAD CONDICIONAL

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{4.7}$$

o

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{4.8}$$

FIGURA 4.8 PROBABILIDAD CONDICIONAL $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$



EVENTOS INDEPENDIENTES

- Si la probabilidad de un evento A no cambia por la existencia del evento B —*es decir, si* $P(A \mid B) = P(A)$—, entonces los eventos A y B son **eventos independientes**.
- Esto lleva a la definición de la independencia de dos eventos.

EVENTOS INDEPENDIENTES

Dos eventos A y B son independientes si

$$P(A \mid B) = P(A) \tag{4.9}$$

o

$$P(B \mid A) = P(B) \tag{4.10}$$

Si no es así, los eventos son dependientes.

LEYES DE LA PROBABILIDAD

LEY DE LA MULTIPLICACIÓN

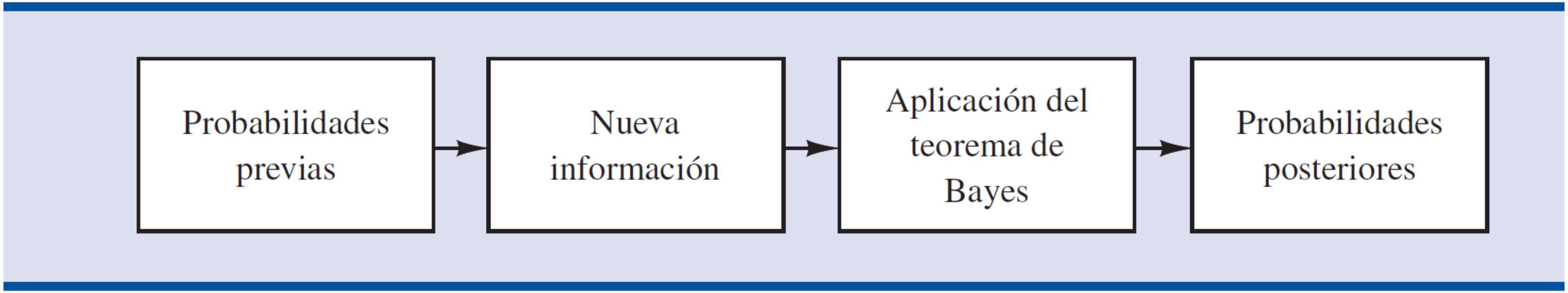
7. La probabilidad de la intersección de dos eventos dependientes:
   - $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \backslash B)$
   - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \backslash \mathrm{A})$
8. La probabilidad de la intersección de dos eventos independientes:
   - $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$
   - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

TEOREMA DE BAYES

- En el estudio de la probabilidad condicional vio que revisar las probabilidades cuando se obtiene más información es parte importante del análisis de probabilidades. Por lo general, se suele iniciar el análisis con una estimación de probabilidad inicial o **probabilidad previa** de los eventos que interesan. Después, de fuentes como una muestra, una información especial o una prueba del producto, se obtiene más información sobre estos eventos. Dada esta nueva información, se modifican o revisan los valores de probabilidad mediante el cálculo de probabilidades revisadas a las que se les conoce como **probabilidades posteriores**. El **teorema de Bayes** es un medio para calcular estas probabilidades.

TEOREMA DE BAYES

FIGURA 4.9 REVISIÓN DE LA PROBABILIDAD USANDO EL TEOREMA DE BAYES



TEOREMA DE BAYES

- Considerando las probabilidades condicionales:

$$P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{y} \quad P(B\backslash A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

- Como $P(A \cap B) = P(B \cap A)$, se despeja de las dos ecuaciones:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A\backslash B) \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\backslash A)$$

- Se igualan las dos ecuaciones:

$$P(B) \cdot P(A\backslash B) = P(A) \cdot P(B\backslash A)$$

- Se puede despejar cualquier probabilidad condicional, en este caso P(A\B):

$$P(A\backslash B) = \frac{P(A) \cdot P(B\backslash A)}{P(B)}$$

TEOREMA DE BAYES Y TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

$$P(A_i \backslash \mathrm{B}) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \backslash A_i)}{P(B)}$$

Donde:

$P(A_i)$ = Probabilidad a priori
$P(B \backslash A_i)$ = Probabilidad condicional
$P(A_i \backslash \mathrm{B})$=Probabilidad a posteriori
$P(B)$=Probabilidad total

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \backslash A_i)$$

TEOREMA DE BAYES

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)} \qquad \mathbf{(4.19)}$$